Ma
$\frac{54^{a}}{3}$

Die
Lehre
von den
zusammenhängenden Brüchen, unbestimmten Aufgaben, von den Reihen, Logarithmen und den dahin einschlagenden Rechnungsarten.

Für den Selbstunterricht bearbeitet,

von

Dr. Friedrich Wilhelm Streit,
Königl. Preuß. Major außer Dienst,
Mitglied der Academie nützlicher Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin ꝛc.

Zweite und vermehrte Auflage.

Weimar,
im Verlage des Landes-Industrie-Comptoirs.
1832.

Lehrbuch
der
reinen Mathematik
für
den Selbstunterricht bearbeitet,
von

Dr. Friedrich Wilhelm Streit,
Königl. Preuß. Major außer Dienst,
Mitglied der Academie nützlicher Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin rc.

Dritter Theil.

1) Die zusammenhängenden Brüche.
2) Die unbestimmten Aufgaben.
3) Die Lehre von den Reihen.
4) Die Logarithmen und ihre Rechnungsarten, so weit solche zur Arithmetik gehören.

Zweite und vermehrte Auflage.

Weimar,
im Verlage des Landes-Industrie-Comptoirs.
1832.

Lehrbuch

der

reinen Mathematik

für

[illegible] Unterricht bearbeitet,

von

Dr. [illegible]

[illegible]

[illegible]

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

[illegible]

1) Die [illegible]
2) [illegible]
3) Die Lehre von den [illegible]
4) Die Logarithmen und ihre [illegible], so weit selbe zur [illegible] gehören.

[illegible] Auflage.

M a i n z,

[illegible]

[illegible]

Lehrbuch

der

reinen Mathematik.

Dritter Theil.

Anhang
zum fünften Abschnitt.

§ 189.
(No 1.)

Bei der 57sten Aufgabe ist bereits gezeigt worden, daß man zuweilen auf Gleichungen kömmt, welche die Gestalt

$$x^4 \pm Ax^2 = \pm B \qquad (\mathfrak{A}$$

haben; wo A und B jede beliebige ganze, oder gebrochene positive oder negative Größe vorstellen können.

Das Zeichen $\pm$ giebt zu erkennen, daß sowohl das eine, als das andere stattfinden kann; nämlich es kann heißen

$$x^4 + Ax^2 = B$$
oder $x^4 + Ax^2 = - B$
oder auch $x^4 - Ax^2 = - B$
oder $x^4 - Ax^2 = B$

Zuweilen trifft es nun wohl, daß man den Werth von x völlig rational erhält, wie es auch in Aufgabe 57 der Fall war, doch ist dieses nicht immer so. Z. B.

$$x^4 - 8x^2 = 17$$

so ist $x^4 - 8x^2 + 16 = 33$

und $x^2 - 4 = \sqrt{33}$

woraus $x^2 = 4 \pm \sqrt{33}$

endlich $x = \sqrt{4 \pm \sqrt{33}}$.

Hier ist es also nicht der Fall, daß man für x einen rationalen Ausdruck erhält.

Man kann solchen Ausdrücken eine bequemere Form geben, und zwar auf folgende Art:

$$x^4 \pm Ax^2 = \pm B$$

$$x^4 \pm Ax^2 + \left[\frac{A}{2}\right]^2 = \pm B + \frac{A^2}{4}$$

$$x^2 \pm \frac{A}{2} = \sqrt{\pm B + \frac{A^2}{4}}$$

$$x^2 = \mp \frac{A}{2} \pm \sqrt{\pm B + \frac{A^2}{4}}$$

$$x = \sqrt{\pm \frac{A}{2} \pm \sqrt{\pm B + \frac{A^2}{4}}} \quad (\mathfrak{B}$$

Um die Entwickelung dieser Formel leichter übersehen zu können, setze man

$$\pm \tfrac{1}{2} A = \pm a, \text{ und } \left[\pm B + \frac{A^2}{4}\right] = b$$

so wird Gleichung B, nun

$$x = \sqrt{\pm a \pm \sqrt{b}}$$

Man nehme nun an, es sey

$$\sqrt{\pm a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{y} \pm \sqrt{z} \quad (\mathfrak{C}$$

wo man sich für z und y solche Werthe denkt, daß die Gleichung richtig ist. Es ist also auch

$$(\sqrt{\pm a \pm \sqrt{b}})^2 = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

und $a + \sqrt{b} = y \pm 2\sqrt{yz} + z$

Da nun einmal y und z willkührlich angenommen worden, so setze man

es sey $a = y + z$, und $\pm \sqrt{b} = \pm 2\sqrt{yz}$ nämlich man setze die rationalen Glieder der Theile beider Gleichungen und auch die irrationalen Glieder einander gleich. Da nun

$$a = y + z$$
$$y = a - z \quad \text{(D)}$$

$$\sqrt{b} = 2\sqrt{yz}$$
$$\sqrt{b} = 2\sqrt{z} \cdot \sqrt{y}$$
$$\sqrt{b} = \sqrt{4z} \cdot \sqrt{y}$$
$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{4z}} = \sqrt{y}$$
$$\sqrt{\frac{b}{4z}} = \sqrt{y}$$
$$\frac{b}{4z} = y$$

Also nun

$$a - z = \frac{b}{4z}$$
$$4az - 4z^2 = b$$
$$4z^2 - 4az = - b$$
$$z^2 - az = - \frac{b}{4}$$
$$z^2 - az + \left[\frac{a}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{b}{4}$$
$$z - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - b}{4}}$$
$$z = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - b}}{2}$$
$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$$

Diesen Werth von z substituire man in die Gleichung D; so ist

$$y = a - \left[\frac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}\right]$$
$$y = \frac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$$

Die beiden, für y und z gefundenen Werthe substituire man in die Gleichung C, so ist

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}}$$

Nach dieser Formel lassen sich nun alle Ausdrücke, wie $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ u. s. w. in eine bequemere Form bringen.

§. 190.

(No. 2.)

Es sey $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ nach obiger Formel zu behandeln, so ist $a = 3$, $b = 5$; also

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{9 - 5}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{9 - 5}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4}} + \sqrt{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{4}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 2} + \sqrt{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot 2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}} + \sqrt{\tfrac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}}$$ den Nenner rational gemacht.

$$= \sqrt{\tfrac{10}{4}} + \sqrt{\tfrac{2}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{10} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

Hat man hier eine Wurzeltafel bei der Hand, so ist der Ausdruck sehr leicht aufgelös't, und auch ohne solche,

wenn man die Quadratwurzel aus 10 und 2 mit einigen Decimalstellen sucht.

Nun ist $\sqrt{10} = 3,162278$
und $\sqrt{2} = 1,414214$

$$\sqrt{10} + \sqrt{2} = 4,576592$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = 2,288296$$

Eben so ist in $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $a = 2$, $b = 3$.
Mithin

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3}} - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1}} - \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Welcher Ausdruck ebenso, wie der vorige, völlig aufgelös't wird.

Kommen bei solchen Ausdrücken Wurzel-Coëfficienten vor, so kann zwar der, welcher vor der ersten Wurzel steht, stehen bleiben; der vor det zweiten Wurzel aber, muß erst unter dieselbe geschafft werden, ehe die Formel angewendet werden kann.

Z. B. $2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3 + \sqrt{4 \cdot 2}}$ $= 2\sqrt{3 + \sqrt{8}}$; nun erst ist $a = 3$, $b = 8$; also

$$2\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\,.\,3+\tfrac{1}{2}\sqrt{9-8}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\,.\,3-\tfrac{1}{2}\sqrt{9-8}}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1}}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{\tfrac{4}{2}} + \sqrt{\tfrac{2}{2}}\right]$$

$$= 2(\sqrt{2} + \sqrt{1})$$

$$= 2(1 + \sqrt{2})$$

$$2\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Ferner

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11-\sqrt{36\,.\,2}} = \sqrt{11-\sqrt{72}}$$

hier ist $a = 11$; $b = 72$

Also

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{11}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{121-72}} - \sqrt{\tfrac{11}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{121-72}}$$

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{11}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{49}} - \sqrt{\tfrac{11}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{49}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{11}{2}+\tfrac{1}{2}\,.\,7} - \sqrt{\tfrac{11}{2}-\tfrac{1}{2}\,.\,7}$$

$$= \sqrt{\tfrac{18}{2}} - \sqrt{\tfrac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

Es wird aus diesen Beispielen schon deutlich geworden seyn, daß, wenn in dem gegebenen Ausdrucke das

Zeichen positiv, auch in der Formel das Zeichen $\pm$ positiv, und im entgegengesetzten Falle negativ genommen werden muß.

Nach derselben Formel gearbeitet, findet man

$$\sqrt{87 - 12\sqrt{42}} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{28 + 5\sqrt{12}} = 5 + \sqrt{3}$$

Diese Art Ausdrücke kommen sehr häufig in der analytischen Geometrie vor, und der Nutzen dieser Formel wird dort erst noch deutlicher einleuchten.

Folgende Aufgaben mag der fleißige Anfänger zu seiner Uebung lösen, und die hier beigefügten Resultate zu finden suchen.

$$\sqrt{\sqrt{27} + 2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{3};$$

$$\sqrt{\sqrt{32} - \sqrt{24}} = \sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2};$$

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Sechster Abschnitt.

Von den zusammenhängenden Brüchen.

§. 191.

(No. 3.)

Anmerkung. Ich habe diese Brüche bei der Lehre von den Brüchen absichtlich weggelassen, weil solche mir dort noch etwas zu schwierig schienen, und schalte sie hier als eigenen Abschnitt ein, wo ich sogleich ihre Anwendung darauf folgen lasse.

Ein zusammenhängender Bruch, Stufenbruch, Kettenbruch, stetiger Bruch, ist derjenige, dessen Zähler eine Einheit, sein Nenner aber eine ganze Zahl mit einem angehängten ächten Bruch, dessen Zähler wieder = 1, und der Nenner wie vorhin gestaltet ist, u. s. w. z. B.

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

welcher dem ächten Bruche $\frac{57}{188}$ gleich ist.

Eben so ist der zusammenhängende Bruch

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{2}}}} = \text{dem Afterbruche } \frac{124}{37}$$

Man bedient sich der zusammenhängenden Brüche vorzüglich da, wenn Zähler und Nenner große Zahlen, und unter sich Primzahlen sind; wo man sodann durch einen solchen zusammenhängenden Bruch mehrere Brüche erhält, welche Partial- auch Näherungs-Brüche genannt werden, und welche dem gegebenen Bruche zwar nicht vollkommen an Werthe gleich, doch aber nur um ein Weniges kleiner oder größer sind.

Eben so kann man für große Verhältnißzahlen, die nicht mehr auf dem gewöhnlichen Wege abgekürzt werden können, durch zusammenhängende Brüche Näherungswerthe finden. Endlich bedient man sich dieser Brüche, um einen unbekannten Exponenten in einer Gleichung zu entwickeln.

§. 192.

(No. 4.)

Ein gegebener gemeiner Bruch wird auf folgende Art in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt.

1) Man dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, so erhält man zum Zähler 1, und zum Nenner eine ganze Zahl mit einem angehängten ächten Bruch.

2) Mit diesem ächten Bruche verfahre man gerade so, wie mit dem gegebenen.

3) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man für den angehängten ächten Bruch den Zähler 1 erhält. Z. B.

$$\frac{57}{188} = \frac{57 : 57}{188 : 57} = \frac{1}{3 + \frac{17}{57}} = \frac{1}{3 + \frac{17 : 17}{57 : 17}}$$

$$= \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{6}{17}}} \qquad = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{6 : 6}{17 : 6}}}$$

$$= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{6}}}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{5:5}{6:5}}}}$$

$$= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}};$$

Kürzer kann man jedoch jeden ächten Bruch in einen zusammenhängenden verwandeln, wenn man des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maaß sucht, und die Quotienten anmerkt; es sind sodann diese Quotienten die auf einander folgenden Nenner des Kettenbruchs. Z. B.

	3		3		2		1		5	
188	:	57	:	17	:	6	:	5	:	1
171		51		12		5		5		
17		6		5		1		0		

Oder

57 | 188 | 3, Iter Quotient.
   | 171 |

17 | 57 | 3, IIter Quotient.
   | 51 |

6 | 17 | 2, III. Quotient.
   | 12 |

5 | 6 | 1, IV. Quotient.
   | 5 |

1 | 5 | 5, Vter Quotient.
   | 5 |

0

Hier sind nun 3, 3, 2, 1, 5 die auf einander folgenden Nenner des gesuchten Kettenbruchs.

§. 193.

(No. 5.)

Behält man von einem solchen Bruche nur ein Glied bei (man setzte z. B. hier $\frac{57}{188} = \frac{1}{3}$); so würde der Werth von $\frac{1}{3}$ etwas zu groß seyn, nämlich $\frac{57}{188} < \frac{1}{3}$, weil man von dem Nenner etwas weggelassen, und deßhalb den Bruch vergrößert hat. Nimmt man 2 Glieder, so ist

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = 1 : \frac{10}{3} = 1 . \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Dieser Bruch ist wieder etwas kleiner, nämlich:

$$\frac{3}{10} < \frac{57}{188}$$

denn man hat von dem Divisor oder der 2ten 1, $\frac{1}{2}$ weggelassen, wodurch der Divisor der 1sten 1 etwas größer, und somit der Bruch kleiner, als der wahre Werth geworden ist.

Nimmt man 3 Glieder, nämlich:

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{3 + 1 : \frac{7}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{2}{7}}$$

$$= 1 : \frac{23}{7} = \frac{7}{23}, \text{ und } \frac{7}{23} > \frac{57}{188}$$

so hat man von dem Divisor der dritten 1 etwas weggelassen, wodurch der Divisor der 2ten 1 größer, und eben deßhalb der Divisor der 1sten 1 kleiner, und somit der Werth des Bruchs wieder größer als bei 2 Gliedern, und größer als der gegebene wird.

Nimmt man vier Glieder, so wird der Werth wieder etwas kleiner u. s. f.; es nähern sich jedoch diese Brüche immer mehr dem wahren Werthe, je mehr Glieder man nimmt, bis zuletzt, wenn man den ganzen zusammenhängenden Bruch wieder auflöset, der gegebene Bruch wieder herauskömmt.

Wir haben bereits gefunden, daß

$$\frac{1}{3+\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}; \quad \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}} = \frac{7}{23}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+1:\frac{3}{1}}}$$

$$= \frac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3+1:\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{3}{10}} = 1:\frac{33}{10} = \frac{10}{33}$$

Endlich noch

$$\frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+1:\frac{6}{5}}}}$$

$$= \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{5}{6}}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+1:\frac{17}{6}}}$$

$$= \frac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{6}{17}}} = \frac{1}{3+1:\frac{57}{17}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{17}{57}} = 1:\frac{188}{57} = \frac{57}{188}$$

§. 194.

(No. 6.)

Verwandelt man die gefundenen Partialbrüche in Decimalbrüche, so ist

I. $\frac{3}{10} = 0,3$

II. $\frac{7}{23} = 0,30434\ldots$

III. $\frac{10}{33} = 0,30303\ldots$

IV. $\frac{57}{188} = 0,30319\ldots$

An diesen vier Brüchen sieht man, daß der erste mit allen drei übrigen in der ersten Decimalstelle übereinstimmt, auch die zweite bei Allen gleich ist, also die Differenzen nur erst in Tausendtheilen der Einheit anfangen; ferner zeigt sich, daß I. etwas kleiner als IV., II. aber etwas größer, und III. wieder kleiner als IV. ist.

Endlich bemerkt man noch, daß die Brüche sich immer mehr den gegebenen nähern, denn I. und IV. haben eine, II. und IV. zwei, und III. und IV. drei Decimalstellen mit einander gemein.

§. 195.

(No. 7.)

Folgende Beispiele mögen für Anfänger dienen, theils um gemeine Brüche in zusammenhängende zu verwandeln, theils um die zusammenhängenden aufzulösen, und ihre Werthe durch gemeine Brüche auszudrücken.

Es sey der Bruch $\frac{279}{460}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

$$\frac{279}{460} = \cfrac{1}{1+\frac{181}{279}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{98}{181}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{83}{98}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{15}{83}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{8}{15}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\frac{7}{8}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{7}}}}}}}};$$

oder nach der kürzeren Art

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 5 & & 1 & & 1 & & 7 & \\ 460 & : & 279 & : & 181 & : & 98 & : & 83 & : & 15 & : & 8 & : & 7 & : & 1; \\ \frac{279}{181} & & \frac{181}{98} & & \frac{98}{83} & & \frac{83}{15} & & \frac{75}{8} & & \frac{8}{7} & & \frac{7}{1} & & & & \end{array}$$

weßhalb $\frac{279}{460} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{7}}}}}}}}$;

A.

Sollen nun für den Kettenbruch A die zugehörigen Partialbrüche gefunden, und der ganze Bruch wieder in seine vorige Gestalt aufgelöset werden, so ist

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{1}} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \frac{1}{1+1:\frac{2}{1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3};$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{2}{1}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{1+1:\frac{3}{2}} = 1 : 1\tfrac{2}{3} = 1 : \frac{5}{3} = \frac{3}{5};$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{6}{5}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{5}{6}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{11}{6}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{6}{11}}} = \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{17}{11}} = \cfrac{1}{1 + \frac{11}{17}}.$$

$$= 1 : \frac{28}{17} = \underbrace{\frac{17}{28}}.$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1}}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{6}{1}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{7}{6}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6}{7}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{18}{7}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{7}{18}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + 1 : \frac{20}{13}} = \cfrac{1}{1 + \frac{13}{20}}$$

$$= 1 : \frac{33}{20} = \underbrace{\frac{20}{33}}.$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+1:\frac{2}{1}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{2}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{11}{2}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{11}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{13}{11}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{11}{13}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{24}{13}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{13}{24}}} = \cfrac{1}{1+1:\frac{37}{24}} = \cfrac{1}{1+\frac{24}{37}}$$

$$= 1 : \frac{61}{37} = \underbrace{\frac{37}{61}}.$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+1:\frac{8}{7}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\frac{7}{8}}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+1:\frac{15}{8}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{8}{15}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{83}{15}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{15}{83}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{98}{83}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{83}{98}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1:\frac{181}{98}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{98}{181}}} = \frac{1}{1 + 1 : \frac{279}{181}} = \frac{1}{1 + \frac{181}{279}}$$

$$= 1 : \frac{460}{279} = 1 \cdot \frac{279}{460} = \frac{279}{460}.$$

§. 196.

(No. 8.)

Um die eben gezeigte, etwas mühsame Rechnung zu ersparen, hat man eine Regel gefunden, mittelst welcher man aus den gefundenen Quotienten, sowohl die Partial-Brüche, als den gegebenen Bruch selbst sehr leicht und schnell herstellen kann.

Man schreibe die Quotienten in einer Linie hinter einander hin, ziehe darunter einen Querstrich, und setze vorwärts außerhalb eines Vertical-Striches $\frac{0}{1}$ als einen Bruch an; und schreibe unter den ersten Quotienten 1, getheilt durch diesen Quotienten. Nun findet man die folgenden Zähler, wenn man den 2ten Quotienten mit dem ersten Zähler multiplicirt und den vorigen Zähler (hier 0) hinzu addirt; eben so findet man den 2ten Nenner, wenn man den 2ten Quotienten mit dem ersten Nenner multiplicirt und den vorigen Nenner hinzuaddirt, u. s. f.

Oder

Der $n$te Zähler wird gefunden, wenn man den n Quotienten mit dem $(n-1)$sten Zähler multiplicirt und den $(n-2)$ten Zähler hinzuaddirt: so wird auch der $n$te Nenner gefunden, wenn man den $n$ten Quotienten mit dem $(n-1)$sten Nenner multiplicirt und den $(n-2)$ten Nenner hinzuaddirt.

Der Bruch $\frac{57}{188}$ nach dieser Regel aufgelöset, giebt folgende Tafel.

Quotienten		3	3	2	1	5
Zähler	0	1	3	7	10	57
Nenner	1	3	10	23	33	188

Deutlicher noch mag diese Rechnung aus folgendem Ansatz erhellen.

Erster Bruch $\frac{\text{Einheit}}{\text{1ster Quotient}} = \frac{1}{3}$

Zweiter Bruch $\frac{3\,.\,1 + 0}{3\,.\,3 + 1} = \frac{3}{10}$

Dritter Bruch $\frac{2\,.\,3 + 1}{2\,.\,10 + 3} = \frac{7}{23}$

Vierter Bruch $\frac{1\,.\,7 + 3}{1\,.\,23 + 10} = \frac{10}{33}$

Fünfter Bruch $\frac{5\,.\,10 + 7}{5\,.\,33 + 23} = \frac{57}{188}$

Von den gefundenen Partial=Brüchen kann nun einer statt den gegebenen genommen werden, wie man es der Richtigkeit der Rechnung halber für nöthig achtet.

Die eben gezeigte Rechnung zum Auffinden der Partial-Brüche für den Bruch $\frac{279}{460}$ wäre folgende.

Quotienten		1	1	1	1	5	1	1	7
Zähler	0	1	1	2	3	17	20	37	279
Nenner	1	1	2	3	5	28	33	61	460

§. 197.
(No. 9.)

Das eben gezeigte sehr kurze Verfahren kann auf folgende Art als richtig erwiesen werden.

Es sey der gegebene Bruch

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{f}}}}}$$

Ich werde nun auf diesen Bruch zuerst das vorgezeigte kurze Verfahren anwenden, jedoch der Bequemlichkeit halber die vorher horizontal stehenden Columnen jetzt vertical stellen.

Quotienten.	Zähler.	Nenner.
	0	1
a	1	a
b	$1.b + 0 = b$	$b \,.\, a + 1 = ab + 1$
c	$bc + 1$	$abc + c + a$
d	$bcd + d + b$	$abcd + ad + cd + ab + 1$
f	$bcdf + df + bf + bc + 1$	$abcdf + adf + cdf + abf + f + abc + c + a$

So sind die daraus entsprungenen Brüche folgende.

1ster Bruch $= \frac{1}{a}$

2ter Bruch $= \frac{b}{ab + 1}$

3ter Bruch $= \frac{bc + 1}{abc + a + c}$

4ter Bruch $= \frac{bcd + d + b}{abcd + ad + cd + ab + 1}$

5ter Bruch $= \frac{bcdf + df + bf + bc + 1}{abcdf + adf + cdf + abf + f + abc + c + a}$

Wenn man nun auf dieses Beispiel das Verfahren aus §. 195. anwendet, so erhält man dieselben Resultate, welche man eben auf dem abgekürzten Wege erhalten hat.

Wenn nämlich

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{f}}}}}$$ So ist

der erste Bruch . . . . . . $\underbrace{\frac{1}{a}}$

Der 2te $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} = \cfrac{1}{\cfrac{ab + 1}{b}} = 1 \,.\, \frac{b}{ab + 1} = \underbrace{\frac{b}{ab + 1}}$

Der 3te $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}} = \cfrac{1}{a + 1 : \cfrac{bc + 1}{c}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c}{bc + 1}} =$

$$= 1 : \frac{abc + a + c}{bc + 1} = \underbrace{\frac{bc + 1}{abc + a + c}}$$

Der 4te $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + 1 : \cfrac{cd + 1}{d}}} =$

$$= \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{d}{cd + 1}}} = \cfrac{1}{a + 1 : \cfrac{bcd + b + d}{cd + 1}} =$$

$$= \frac{1}{a + \frac{cd + 1}{bcd + b + d}} = 1 : \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$= \frac{bcd + b + d}{\underbrace{abcd + ab + ad + cd + 1}}$$

Der 5te $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{f}}}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + 1 : \frac{df + 1}{f}}}} =$

$$= \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{f}{df + 1}}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + 1 : \frac{cdf + c + f}{df + 1}}} =$$

$$= \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{df + 1}{cdf + c + f}}} = \frac{1}{a + 1 : \frac{bcdf + bc + bf + df + 1}{cdf + c + f}} =$$

$$= \frac{1}{a + \frac{cdf + c + f}{bcdf + bc + bf + df + 1}} =$$

$$= 1 : \frac{abcdf + abc + abf + adf + a + cdf + c + f}{bcdf + bc + bf + df + 1} =$$

$$= \frac{bcdf + bc + bf + df + 1}{\underbrace{abcdf + abc + abf + adf + a + cdf + c + f}}$$

Da diese Brüche bloß durch einfache Multiplication und Division gefunden wurden, weßhalb die Art sie zu finden und ihre Richtigkeit nicht bezweifelt werden kann, man aber nach der abgekürzten Methode nach §. 196. das Nämliche erhalten hat, so wird auch die Richtigkeit von dieser nicht bezweifelt werden können.

Es kann auch aus jedem dieser Brüche die §. 196. gegebene Regel abgeleitet werden.

So ist z. B.

$$\frac{bcd + d + b}{abcd + cd + ad + ab + 1} = \frac{d\,(bc + 1) + b}{d(abc + c + a) + ab + 1}.$$

Hier ist der 4te Quotient, $bc + 1$ der 3te, und b der 2te Zähler, eben so $abc + c + a$ der dritte, und $ab + 1$ der 2te Nenner.

Dieselbe Untersuchung kann man mit jedem andern der gefundenen Brüche vornehmen.

$$\frac{bcdf + df + bf + bc + 1}{abcdf + cdf + adf + abf + f + abc + c + a} =$$

$$= \frac{f\,(bcd + d + b) + bc + 1}{f\,(abcd + cd + ad + ab + 1) + abc + c + a}.$$

Hier ist f der 5te Quotient, $bcd + d + b$ der 4te Zähler, $bc + 1$ der 3te Zähler; eben so $abcd + cd + ad + ab + 1$ der 4te Nenner, und $abc + c + a$ der 3te Nenner.

Es sind also an diesem sowohl, als an dem vorigen Bruche gerade die Glieder entwickelt worden, welche die gegebene Regel vorschreibt; mithin auch hierdurch die Richtigkeit des Verfahrens dargethan.

§. 198.

(No. 10.)

Ist ein Afterbruch auf die angeführte Art zu behandeln, so kann man entweder erst die Ganzen herausziehen, und mit dem bleibenden ächten Bruche auf die vorgeschriebene Art verfahren, oder den Bruch umkehren, und Zähler zum Nenner, und Nenner zum Zähler machen, und auf vorige Art verfahren, sodann aber die gefundenen Partialbrüche wieder umkehren.

Z. B. es wäre der Afterbruch $\frac{1108}{371}$ auf obige Art abzukürzen; so ist

$$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 1 & & 73 & & 5 & \\ 1108 & : & 371 & : & 366 & : & 5 & : & 1 \\ 742 & & 366 & & 365 & & 5 & & \\ \hline 366 & & 5 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Man entwickelt nun nach voriger Regel nachstehende Tabelle.

Quotienten		2	1	73	5
Zähler	0	1	1	74	371
Nenner	1	2	3	221	1108

Da nun der gegebene Bruch ein Afterbruch war, so sind die gefundenen Partialbrüche

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{221}{74},\ \frac{1108}{371}$$

§. 199.

(No. 11.)

Eben so würde man auch verfahren, wenn das Verhältniß zweier Größen gegen einander in solchen Zahlen gegeben wäre, die sich auf dem gewöhnlichen Wege nicht mehr abkürzen ließen. Z. B.

Die Schlesische Elle verhält sich zur Wiener Elle wie 1830 : 2465; man wollte, ohne große Genauigkeit zu verlangen, durch kleinere Zahlen das Verhältniß wissen. So ist

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & & 2 & & 1 & & 7 & & 2 & & 7 & \\ 2465 & : & 1830 & : & 635 & : & 560 & : & 75 & : & 35 & : & 5 \\ 1830 & & 1270 & & 560 & & 525 & & 70 & & 35 & & \\ \hline 635 & & 560 & & 75 & & 35 & & 5 & & 0 & & \end{array}$$

Da man hier zuletzt nicht auf den Divisor 1 kam, so ist es ein Zeichen, daß sich der Bruch oder die gegebenen Zahlen noch durch 5, als die Zahl. womit man zuletzt ohne Rest dividirt hat, abkürzen lassen, was auch schon aus der hinten befindlichen 5 und 0 ersichtlich ist.

Dessen unerachtet sind die gefundenen Quotienten zu brauchen, und die Tabelle ist folgende

Quotienten		1	2	1	7	2	7
Kleinere Zahl	0	1	2	3	23	49	366
Größere Zahl	1	1	3	4	31	66	493

Multiplicirt man hier 366 und 493 mit 5, so hat man die gegebenen Zahlen.

Es verhält sich also die
Schlesische Elle zur Wiener vollkommen 366 : 493
Schlesische Elle zur Wiener beinahe 49 : 66
oder 23 : 31 u. s. w.

§. 200.

(No. 12.)

Beispiele zur Uebung der zusammenhängenden Brüche.

1) Man soll die Näherungsbrüche für den Bruch $\frac{351}{965}$ bestimmen.

Die Quotienten sind
2, 1, 2, 1, 87,
und die Näherungsbrüche
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$

2) Der Bruch $\frac{5065}{13891}$ soll durch Partialbrüche ausgedrückt werden.

Quotienten 2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 13;

Partialbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{31}{85}$, $\frac{35}{96}$, $\frac{66}{181}$, $\frac{101}{277}$, $\frac{268}{735}$, $\frac{369}{1012}$.

3) Zwei Zahlen verhalten sich zu einander wie 1947 : 3359; man soll dir Näherungszahlen der Verhältnisse finden.

Der Quotient dieses Verhältnisses ist $\frac{1947}{3359}$; man kann also hiermit wie mit einem Bruche verfahren.

Quotienten 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3.

Mithin die Partialbrüche für den Quotienten des Verhältnisses

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{19}$, $\frac{40}{96}$, $\frac{91}{157}$, $\frac{131}{226}$, $\frac{222}{385}$, $\frac{375}{992}$.

Mithin die abgekürzten Verhältnisse

1 : 1, 1 : 2, 3 : 5, 4 : 7, 7 : 12, 11 : 19, 40 : 96, 91 : 157, 131 : 226, 222 : 385, 575 : 992.

4) Der Mond vollendet seinen Lauf am Himmel, im Durchschnitt von 100 Jahren gerechnet, in 27,321661 Tagen: stellt man nun diesen Decimalbruch mit seinem Nenner vor, so beträgt er $27 + \frac{321661}{1000000}$ $= \frac{27321661}{1000000}$ Tage, wenn man die Ganzen zum Afterbruche macht: man kann also sagen, der Mond vollendet 1.000.000 Umläufe in 27,321661 Tagen.

Wie werden sich nun diese Zahlen durch Näherung kleiner ausdrücken lassen?

Man verfährt hier wie §. 198., d. h. man betrachtet $\frac{1000000}{27321661}$ als einen Bruch und sucht die Näherungsbrüche.

Man findet nun auf diesem Wege

$\frac{1}{27}$, $\frac{3}{82}$, $\frac{28}{765}$, $\frac{143}{3907}$ u. s. w.

Man kann also nun sagen, der Mond vollendet beinahe in 27 Tagen seinen Lauf, genauer in 82 Tagen 3 Umläufe, noch genauer in 3907 Tagen 143 Umläufe u. s. w.

Anwendung der zusammenhängenden Brüche zur Entwickelung unbekannter Exponenten.

---

§. 201.

(No. 13.)

Wenn x in einer Gleichung als Exponent vorkömmt, so wird er sich finden lassen, wenn es eine ganze Zahl ist.

Man erhebt zu diesem Zweck die Zahl, welche den Exponenten bei sich führt, auf die auf einander folgenden Potenzen, und wird auf diesem Wege bald den Werth von x finden, wenn es kein Bruch ist. Z. B. es sey

$$15^x = 11390625$$

So ist

$$15^2 = 225$$
$$15^3 = 3375$$
$$15^4 = 50625$$
$$15^5 = 759375$$
$$15^6 = 11390625$$

Folglich $x = 6$

Noch mehr erleichtert wird diese Arbeit, wenn man eine Potenz-Tafel zur Hand hat.

Ist aber x ein Bruch, so wird man es auf diesem Wege nicht finden, wenn nämlich die gegebene Zahl zwischen zwei Potenzen fällt, so kann der Werth von x selbst auf diese Art nicht entwickelt werden.

§ 202.

(No. 14.)

Wenn sich nun in einer Gleichung wie $a^x = b$ ergiebt, daß x größer als eine ganze Zahl, und kleiner als die nächstfolgende, so ist $x =$ dem Exponenten der nächst kleinern Potenz, + einem Bruche; welchen zu bestimmen man folgendermaßen zu Werke geht:

Es sey nämlich $x > m$ und $x < m + 1$

so ist auch $a^{m+1} > b$ und $a^m < b$

man dividire nun b durch a^m, und setze

$$\text{es sey } \frac{b}{a^m} = c$$

d. h. den Werth von a^x dividire man durch die nächst kleinere Potenz von a.

Nun sieht man die vorige Wurzel a als eine Potenz an, und denke sich, n sey von c der nächst kleinere Exponent; nämlich

$$c^n < a \text{ und } c^{n+1} > a$$

wenn c^n nicht $= a$ wäre: man dividire also a durch c^n, nämlich durch die nächst kleinere darin enthaltene Potenz von c; es wäre nun

$$\frac{a}{c^n} = d$$

Auf diese Art fährt man fort, bis man den Quotienten 1 erhält: ist dieses der Fall, so ist x völlig genau gefunden und die Arbeit zu Ende.

So wäre nun hier ferner

$$\underbrace{\frac{c : d^p = e}{d : e^q = 1}}$$

Man behandelt nun die nach einander gefundenen Exponenten, wie die Quotienten eines zusammenhängenden Bruchs.

Es wäre also

$$x = \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}$$

Die nachstehenden Beispiele werden dieses hier allgemein dargethane Verfahren deutlicher darstellen. Z. B.

Aufgabe 1. Zu welcher Potenz muß die Zahl 27 erhoben werden, daß 177147 herauskömmt.

Es ist also $27^x = 177147$, untersucht man nun hier durch eine Potenztafel, oder durch Erhebung, welche Potenz von 27 der gegebenen Zahl gleich ist; so findet sich, daß $27^3 = 19683$, und $27^4 = 531441$; folglich $27^4 > 177147$ und $27^3 < 177147$: es muß also die Division mit $19683 = 27^3$ vorgenommen werden.

Also

$$177147 : 27^3 = 177147 : 19683 = 9$$
$$\frac{177147}{0}$$

Nun dividire man 27 durch die zunächst übereinstimmende Potenz von 9, welche darin enthalten ist.

$$27 : 9^1 = 27 : 9 = 3$$

Und nun 9 durch die nächst übereinstimmende Potenz von 3 dividirt, ist

$$9 : 3^2 = 9 : 9 = 1$$

durch welchen Quotienten 1 sich nun ergiebt, daß die Arbeit zu Ende ist.

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, daß der erste gefundene Quotient immer eine ganze Zahl ist. Nämlich

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 3 + 1 : (1 + \tfrac{1}{2})$$

$$= 3 + 1 : \frac{3}{2} = 3 + 1 \cdot \frac{2}{3} = 3\tfrac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

Da nun $x = \frac{11}{3}$

so ist auch $27^x = 27^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{27^{11}}$

$$= \sqrt[3]{27^5 \cdot 27^5 \cdot 27} = \sqrt[3]{14348907 \cdot 14348907 \cdot 27}$$

$$= \sqrt[3]{205891132094649 \cdot 27} = \sqrt[3]{5559060566555523}$$

$$= 177147$$

woraus die Richtigkeit des Verfahrens erhellet.

Anmerkung. Wer bereits mit Logarithmen umzugehen weiß, kann diese Untersuchung auf eine minder mühsame Art vornehmen.

Nämlich es ist

$$\text{Log.}\ \sqrt[3]{27^{11}} = \frac{11\ \text{Log.}\ 27}{3} = \frac{11 \cdot 1{,}4313638}{3}$$

$$= \frac{15{,}7450018}{3} = 5{,}2483339 = \text{Log.}\ 177147.$$

Es weiß aber auch derjenige, der mit Logarithmen rechnen kann, daß die Entwickelung der unbekannten Exponenten durch solche weit leichter und schneller bewerkstelligt werden kann, und für solche dieses mühsame Auffinden derselben unnöthig ist.

Aufgabe 2. Die Zahl 512 soll auf eine Potenz erhoben werden, welche der Zahl 33554432 gleich ist.

So ist

$$512^x = 33554432$$

Da nun $512^2 = 262144$ und $512^3 = 134217728$, so muß hier mit 512^2 in die gegebene Zahl dividirt werden.

$$33554432 : 512^2 =$$

```
33554432 : 262144 = 128
262144..
--------
 734003.
 262144.
 524288.
--------
2097152
 262144
2097152
-------
      0
```

Nun dividire man 512 durch die höchste darin enthaltene Potenz von 128, so ist

```
512 : 128¹ = 512 : 128 = 4
512
---
  0
```

$$512 : 128^1 = 512 : 128 = 4$$

Ferner 128 durch die höchste übereinstimmende Potenz von 4; nämlich da $4^3 = 64$ und $4^4 = 256$; so ist

$$128 : 4^3 = 128 : 64 = 2$$

```
128
---
  0
```

Endlich 4 durch eine solche Potenz von 2 dividirt, so ist

$$4 : 2^2 = 4 : 4 = 1$$

Man hat nun die Exponenten 2, 1, 3, 2 erhalten, wovon die erste 2 eine ganze Zahl. So ist nun

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = 2 = \frac{1}{1 + 1 : 3\frac{1}{2}} =$$

$$2 + \frac{1}{1 + 1 : \frac{7}{2}} = 2 + 1 : 1\tfrac{2}{7} =$$

$$2 + 1 : \frac{9}{7} = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$$

Man erhält also

$$(512)^{\frac{25}{9}} = 33554432$$

$$\sqrt[9]{512^{25}} = 33554432$$

Da nun $\sqrt[9]{512^{25}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512^{25}}}$; so ist dieser Ausdruck ferner

$= \sqrt[3]{\sqrt[3]{512^5 . 512^5 . 512^5 . 512^5 . 512^5}}$; es ist hierdurch angezeigt, wie man weiter zum Zwecke gelangt, welches ich jedoch den Anfängern zur eigenen Uebung überlassen will.

§. 202.

(No. 14.)

Allgemein kann die Richtigkeit dieses Verfahrens auf folgende Art erwiesen werden.

Es sey $a^x = b$

aber $a^m < b$ und $a^{m+1} > b$

so sey $x = m + \frac{1}{y}$ A.

Also $a^x = a^{m+\frac{1}{y}} = a^m . a^{\frac{1}{y}}$

weßhalb $a^m . a^{\frac{1}{y}} = b$

und $a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^m}$

Nun setze man wieder

$$\frac{b}{a^m} = c$$

so ist auch $a^{\frac{1}{y}} = c$

und $\sqrt[y]{a} = c$

oder $a = c^y$

Es sey aber $c^n < a$ und $c^{n+1} > a$,

und $a = c^{n+\frac{1}{z}}$

also $n + \frac{1}{z} = y$ B.

mithin $a = c^{n+\frac{1}{z}} = c^n \,.\, c^{\frac{1}{z}}$

und $\frac{a}{c^n} = c^{\frac{1}{z}}$

Man setze nun $c^{\frac{1}{z}} = d$

so ist $\sqrt[z]{c} = d$

oder $c = d^z$

Nun sey ferner $d^p < c$ und $d^{p+1} > c$

und deßhalb $d^{p+\frac{1}{v}} = c$

und $p + \frac{1}{v} = z$ C.

so ist $c = d^p \,.\, d^{\frac{1}{v}}$

woraus $d^{\frac{1}{v}} = \frac{c}{d^p}$

Ferner sey $\frac{c}{d^p} = C$

so ist auch $d^{\frac{1}{v}} = C$

und $\sqrt[v]{d} = C$

oder $d = C^v$

Nun sey $v = q + \frac{1}{r}$ u. s. w.

Diesen Werth von v substituire man in die Gleichung C.; so ist

$$z = p + \frac{1}{v} = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}$$

Diesen Werth von z in die Gleichung B. giebt

$$y = n + \frac{1}{z} = n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}};$$

endlich substituire man diesen Werth von y in die Gleichung A, so erhält man:

$$x = m + \frac{1}{y} = m + 1 : \left(n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}\right)$$

$$= m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}}$$

Es wird nun wohl ersichtlich seyn, daß die Arbeit zu Ende ist, wenn man den Quotienten 1 erhält, wo sodann x völlig genau gefunden ist.

§. 203.

(No. 15.)

Kömmt man aber niemals auf den Quotienten 1, so ist der gesuchte Werth von x irrational, oder gar transcendent; d. i. von solcher Beschaffenheit, daß er sich weder durch ganze noch gebrochene, und selbst nicht durch Wurzelgrößen ausdrücken läßt.

Ein solcher Exponent kann nur durch Annäherung gefunden werden.

Man geht in diesem Falle mit der Division so weit, bis man auf einen Quotienten kömmt, der nicht sehr von 1 verschieden ist. Z. B.

$$10^x = 625$$

625	:	10^2	=	6,25
10	:	$(6,25)^1$	=	1,6
6,25	:	$(1,6)^3$	=	1,52587
1,6	:	$(1,52587)^1$	=	1,04857
1,52587	:	$(1,04857)^8$	=	1,04404
1,04857	:	$(1,04404)^1$	=	1,00433
1,04404	:	$(1,00433)^9$	=	1,00416
1,00433	:	$(1,00416)^1$	=	1,00016

Man sieht an dem letzten Quotienten, daß er wenig von 1 abweicht, und nur um $\frac{16}{100000}$ größer ist; man kann also hier die Division zu Ende gehen lassen, und die Exponenten in einen zusammenhängenden Bruch verwandeln, wobei man ebenfalls die früher gezeigte kürzere Methode anwenden kann.

Quotienten		1	3	1	8	1	9	1
Zähler	0	1	3	4	35	39	386	425
Nenner	1	1	4	5	44	49	485	534

Es wird also hier der Bruch $\frac{425}{534}$ schon ziemlich genau seyn, aber noch nicht völlig den Werth von x haben; man kann deßhalb setzen

$$x = 2\frac{425}{534} = 2{,}7958801.$$

Da man jedoch, wie weiter hinten gezeigt werden wird, die unbekannten Exponenten durch die Logarithmen weit leichter und genauer findet, so ist es nicht nöthig, diese Untersuchungen weiter auszudehnen.

Man kann auch Wurzelgrößen in zusammenhängende Brüche verwandeln, wodurch aber kein besonderer Vortheil erwächst, da es bekannt ist, daß man bei Ausziehung der Wurzeln solche durch Dezimalziffern so genau ausdrücken kann, als es die Richtigkeit der Rechnung erfordert.

Die Kettenbrüche haben überhaupt noch mehrere merkwürdige Eigenschaften, die hier alle aufzuführen der Raum nicht gestattet, um so mehr, da solche entbehrlich sind. Wer hierüber vollständig belehrt seyn will, dem empfehlen wir Kausler's Lehre von den kontinuirlichen Brüchen ꝛc. Stuttgart 1803; so wie Legendre Théorie des nombres.

Siebenter Abschnitt.

Das Nöthigste von der unbestimmten Analysis.

§. 204.

(No. 16.)

Eine unbestimmte Aufgabe ist, wie schon §. 178. (No. 47. II.) gesagt worden, eine solche, aus welcher sich nicht so viele Gleichungen ableiten lassen, als unbekannte Größen darin vorkommen. Bei Auflösung solcher Aufgaben bleiben am Ende noch eine oder mehrere unbekannte Größen unbestimmt, für welche sodann die Werthe nach Willkühr angenommen und die übrigen darnach bestimmt werden.

Man nennt deßhalb solche Aufgaben unbestimmte Aufgaben, und die verschiedenen Arten sie zu lösen, gehören in die unbestimmte Analysis.

Da hier am Ende für unbekannte Zahlen willkührliche Werthe angenommen werden können, so leuchtet von selbst ein, daß oft sehr viele Auflösungen Statt finden müssen: es sind aber gewöhnlich diesen Aufgaben noch Bedingungen zugefügt, z. B., daß die gesuchten Zahlen ganz positiv oder rational seyn müssen u. s. w., wodurch die Anzahl der Auflösungen bedeutend vermindert wird.

Für mehrere Aufgaben giebt es jedoch eine unendliche Anzahl von Auflösungen.

Wir wollen die verschiedenen Arten solcher Aufgaben und die bei ihren Auflösungen anzuwendenden Kunstgriffe nach und nach bei den folgenden zeigen.

§. 205.

(No. 17.)

Aufgabe 1. Man suche zwei ganze und positive Zahlen, deren Summe 15 beträgt: welches sind sie?

Die eine Zahl sey x, die andere y

so ist $x + y = 15$

und $\underbrace{x = 15 - y}$ A.

Nun kann man den Werth von x dadurch bestimmen, daß man y nach Willkühr annimmt; es sind aber dadurch, daß x und y ganze und positive Zahlen seyn sollen, dieser Willkühr Gränzen gesetzt.

Man sieht aus A. leicht ein, daß y nicht größer als 14 seyn kann, weil sonst x negativ oder Null würde; auch kann y nicht kleiner als 1 seyn, da es selbst nicht Null seyn kann, und keine Brüche Statt haben sollen: endlich kann auch y nicht negativ seyn, weil sonst $x > 15$ würde.

Denn wenn $y = - 1$, so wäre $x = 15 - (- 1) = 15 + 1 = 16$, welches ebenfalls nicht seyn kann.

Diese Betrachtungen müssen jederzeit nach vollendeter Auflösung der Gleichungen über die erhaltenen Werthe angestellt werden, um zu wissen, wie weit man bei Annahme der willkührlichen Zahlen gehen darf.

Wir können also hier nur die Werthe von 1 bis 14 für y annehmen, wodurch die Anzahl der Auflösungen auf 14 beschränkt wird.

In der Gleichung A setze man nun

$y =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14;
so ist $x =$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1.

Aufgabe 2. Es sollen zwei ganze und positive Zahlen gefunden werden, deren Summe zu ihrer Differenz addirt 12 giebt.

Die eine Zahl sey $= x$, die andere $= y$, so ist ihre Summe $x + y$, ihre Differenz $x - y$. So ist

$$(x + y) + (x - y) = 12$$
$$x + y + x - y = 12$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

Hier kann für y jede ganze und positive Zahl angenommen werden, wenn nur $x = 6$ bleibt; es finden also eine unendliche Anzahl von Auflösungen statt.

$x =$	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6...
$y =$	1,	2	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10...
Summa	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16...
Differenz	5,	4,	3,	2,	1,	0,	−1,	−2,	−3,	−4...
addirt	12,	12,	12,	12,	12,	12,	12,	12,	12,	12...

Dieselben Resultate erhält man, wenn auch der Werth von y noch so groß angenommen wird, nur muß, wie hier immer, die veränderliche Zahl von der beständigen abgezogen werden. Z. B.

x	$=$	6
y	$=$	1001
Summa	$=$	1007
Differenz	$=$	− 995
addirt	$=$	12

Wollte man die vorige Aufgabe so stellen, daß statt 12, 14 gefunden würde, so wird man $x = 7$ finden. Nämlich

x	=	7,	7,	7,	7,	7,	7 . . .
y	=	1,	2,	3,	4,	5,	6 . . .
Summa	=	8,	9,	10,	11,	12,	13 . . .
Differenz	=	6,	5,	4,	3,	2,	1 . . .
addirt		14,	14,	14,	14,	14,	14 . . .

Man findet hierdurch folgende Eigenschaft der Zahlen.

Die Summe und Differenz zweier Zahlen zusammen addirt, giebt immer das Doppelte der Zahl, von welcher abgezogen worden ist.

Es ist nämlich allgemein ausgedrückt

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

wo x und y jede ganze, gebrochene, positive und negative Zahl seyn kann, welches aus Folgendem noch deutlicher wird.

$x =$	80 . .	$\frac{3}{4}$ . .	$\frac{5}{7}$ . .	$-$ 8
$y =$	1 . .	$\frac{1}{4}$ . .	$\frac{3}{4}$ . .	$-$ 1
Summa	81 . .	$\frac{4}{4}$ . .	$\frac{41}{28}$ . .	$-$ 9
Differenz	79 . .	$\frac{2}{4}$.	$-\frac{1}{28}$ . .	$-$ 7
addirt	160 . .	$\frac{6}{4}$ . .	$\frac{40}{28} = \frac{10}{7}$	$-$ 16.

§. 206.

(No. 18.)

Aufgabe 3. Man soll 25 in zwei Theile theilen, so daß der eine durch 2, der andere aber durch 3 theilbar sey; beide Theile aber ganze und positive Zahlen sind.

Da der eine Theil durch 2 theilbar seyn soll, so sey er $= 2x$.

Aus demselben Grunde sey der andere Theil $= 3y$; so ist

$$2x + 3y = 25$$

$$x = \frac{25 - 3y}{2}$$

$$x = 12 - y + \frac{1 - y}{2} \quad \mathfrak{A}.$$

Da nun x eine ganze Zahl seyn soll, so muß auch $\frac{1 - y}{2}$ eine ganze Zahl seyn; man setze deßhalb

$$\frac{1 - y}{2} = A$$

$$1 - y = 2A$$

$$- 1 + y = - 2A$$

$$y = 1 - 2A$$

Diesen Werth für y substituirt man in die Gleichung $\mathfrak{A}$, so ist

$$x = 12 - (1 - 2A) + \frac{1 - (1 - 2A)}{2}$$

$$= 12 - 1 + 2A + A = 11 + 3A$$

so ist nun der eine Theil

$2x = 22 + 6A$ und der andere

$3y = 3 - 6A$.

Aus diesen Werthen für beide Theile ergiebt sich

1) A kann nicht positiv seyn, weil sonst $2x > 25$, und $3y$ negativ würden.

2) A muß deßhalb negativ genommen werden, kann aber nicht mehr als $- 3$ betragen, weil, wenn $A > - 3$, $2x$ negativ und $3y$ größer als 25 würde.

3) Kann auch $A = 0$ seyn.

Es finden also folgende Werthe für A statt.

Es sey	A	$= 0,$	$- 1,$	$- 2,$	$- 3;$
so ist	$2x$	$= 22,$	$16,$	$10,$	$4;$
und	$3y$	$= 3,$	$9,$	$15,$	$21;$
		$25,$	$25,$	$25,$	$25;$

Es ergeben sich auch an den Werthen für $2x$ und $3y$ die anderen Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 4. Es sind in einem Gießhause zweierlei Kanonen gegossen worden; von der ersten Gattung wiegt eine 16, von der zweiten Gattung eine 25 Centner: man hat aber zur zweiten Gattung einen Centner Metall mehr gebraucht, als zur ersten. Wie viel waren von jeder Gattung?

Anzahl der ersten Gattung $= x$
Anzahl der zweiten Gattung $= y$
So ist $16x - 1 = 25y$
woraus $x = \frac{25y + 1}{16}$

$$x = y + \frac{9y + 1}{16} \qquad \text{A.}$$

Da nun x eine ganze Zahl seyn soll, so muß auch $\frac{9y + 1}{16}$ eine ganze Zahl seyn. Man setze deßhalb

$$\frac{9y + 1}{16} = A$$

$$9y + 1 = 16A$$

$$y = \frac{16A - 1}{9}$$

$$y = A + \frac{7A - 1}{9} \qquad \text{B.}$$

Es darf aber auch dieser Ausdruck nicht gebrochen seyn, deßhalb sey

$$\frac{7A - 1}{9} = B$$

$$7A = 9B + 1$$

$$A = \frac{9B + 1}{7}$$

$$A = B + \frac{2B + 1}{7} \qquad \text{C.}$$

Da aber auch der zuletzt gefundene Ausdruck für A kein Bruch seyn darf, so setze man

$$\frac{2B + 1}{7} = C$$

$$2B = 7C - 1$$

$$B = \frac{7C - 1}{2}$$

$$B = 3C + \frac{C - 1}{2} \qquad \mathfrak{D}.$$

Endlich setze man noch

$$\frac{C - 1}{2} = D$$

$$C = 2D + 1$$

Diesen Werth substituire man in D, so ist

$$B = 3\,(2D + 1) + \frac{2D + 1 - 1}{2}$$

$$B = 6D + 3 + D = 7D + 3$$

Diesen Werth für B in C giebt

$$A = 7D + 3 + \frac{2\,(7D + 3) + 1}{7}$$

$$A = 7D + 3 + 2D + 1 = 9D + 4$$

Den Werth für A in die Gleichung B substituirt, so erhält man

$$y = 9D + 4 + \frac{7\,(9D + 4) - 1}{9}$$

$$y = 9D + 4 + 7D + 3 = 16D + 7$$

Endlich den Werth von y in die Gleichung A substituirt, giebt

$$x = 16D + 7 + \frac{9\,(16D + 7) + 1}{16}$$

$$= 16D + 7 + 9D + 4 = 25D + 11$$

Man kann nun für D jede beliebige positive Zahl, und selbst Null setzen, und so x und y entwickeln.

Es sey $D = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$
so ist $x = 7, 23, 39, 55, 71, 87 \ldots$
und $y = 11, 36, 61, 86, 111, 136 \ldots$

Aus dieser und der vorigen Aufgabe läßt sich nun folgender allgemeiner Schluß ziehen, welcher bei den Auflösungen unbestimmter Aufgaben Anwendung findet.

Wenn die zuletzt angenommene Größe, wie hier D, und in der vorigen Aufgabe A einmal positiv und einmal negativ erscheint, so hat die Anzahl der Auflösungen ihre Gränzen; kömmt aber jene Größe beide Mal positiv zum Vorschein, so hat die Aufgabe eine unendliche Anzahl Auflösungen.

So wie Aufgabe 3, so wird auch die folgende behandelt.

Aufgabe 5. Unter ein Commando von Cavalerie und Infanterie sollen 1770 Thlr. Beute getheilt werden; ein Cavalerist soll 31 Thlr., und ein Infanterist 21 Thlr. erhalten: wie viel können von jeder Waffengattung seyn?

Setzt man x Cavaleristen, y Infanteristen, so erhält man

$$x = 21B - 12, \quad y = 102 - 31B;$$

Setzt man nun

$B = 1, 2, 3;$
so ist $x = 9, 30, 51;$
und $y = 71, 40, 9.$

Wollte man B negativ, oder Null annehmen, so würde x negativ; nähme man aber $B > 3$, so würde y negativ werden: es finden also nur obige 3 Auflösungen statt.

Nach Aufgabe 4. kann nun auch die folgende bearbeitet werden.

Aufgabe 6. Man bezahlt für Ausrüstung eines Infanteristen 20. und für Ausrüstung eines Cavaleristen

ohne Pferd 31 Thaler; da nun die Infanterie zusammen 7 Thaler mehr auszurüsten kostet, wie die Cavalerie, so fragt sich, wie viel von beiden Waffen ausgerüstet werden können?

Man setze x Cavaleristen, y Infanteristen. Nach Aufgabe No. 4. verfahren, findet man

$$x = 20E + 3; \quad y = 31E + 5$$

Setzt man nun

$$E = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots$$

so ist $x = 3,\ 23,\ 43,\ 63,\ 83,\ 103,\ 123 \ldots$

und $y = 5,\ 36,\ 67,\ 98,\ 129,\ 160,\ 191 \ldots$

Aus den Werthen von x und y ergiebt sich, daß die Auflösungen in das Unendliche gehen.

§. 207.

(No. 19.)

Aufgabe 7. Man suchet ganze Zahlen, die durch 7 dividirt 2, und durch 5 dividirt 3 übrig lassen. Welche sind es?

Es sey der Quotient, der herauskömmt, wenn man mit 7 dividirt $= x$, und der, welchen man erhält, wenn man mit 5 dividirt $= y$, die Zahl selbst $= z$; so ist

$$7x + 2 = z \text{ und } 5y + 3 = z$$

Also

$$7x + 2 = 5y + 3$$

$$7x = 5y + 1$$

$$x = \frac{5y + 1}{7} \qquad \text{A.}$$

Da aber x kein Bruch seyn kann, so setze man

$$\frac{5y + 1}{7} = A$$

$$5y = 7A - 1$$

$$y = \frac{7A - 1}{5} = A + \frac{2A - 1}{5} \qquad \text{B.}$$

Ferner sey

$$\frac{2A-1}{5} = B$$

$$2A = 5B + 1$$

$$\underbrace{A = 2B + \frac{B+1}{2}}$$ C.

Endlich noch

$$\frac{B+1}{2} = C$$

woraus $\underbrace{B = 2C - 1}$

Diesen Werth in C substituirt, giebt

$$A = 4C - 2 + \frac{2C - 1 + 1}{2} = \underbrace{5C - 2}$$

Diesen Werth in die Gleichung B, giebt

$$y = 5C - 2 + \frac{10C - 4 - 1}{5} = 7C - 3$$

und noch den letzten Werth in die Gleichung A, so ist

$$x = \frac{5(7C - 3) + 1}{7} = \frac{35C - 15 + 1}{7}$$

$\underbrace{x = 5C - 2.}$ Diesen Werth in eine der beiden Fundamentalgleichungen oder der Sicherheit halber in beide substituirt, giebt

$$z = 7(5C - 2) + 2 = 35C - 14 + 2 = \underbrace{35C - 12.}$$

Oder

$$z = 5(7C - 3) + 3 = 35C - 15 + 3 = \underbrace{35C - 12.}$$

wo für C jede beliebige positive und ganze Zahl angenommen werden kann. Da hier kein negativer Werth stattfinden kann, so darf auch C nicht $= 0$ seyn, weil sonst z negativ würde.

Setzt man

$C = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5 \ldots$

so ist $z = 23, \ 58, \ 93, \ 128, \ 163 \ldots$

wo sich an den Werthen für z ergiebt, daß solche mit dem Anwachs von 35 in das Unendliche wachsen.

Aufgabe 8. Man suche Zahlen, die durch 39 dividirt 16, und durch 56 dividirt, 27 übrig lassen.

Es sey x der Quotient, wenn man durch 39 dividirt, und y der Quotient, wenn man mit 56 dividirt; z die Zahl selbst.

So ist

$$39x + 16 = z \text{ und } 56y + 27 = z$$

$$39x + 16 = 56y + 27$$

$$39x = 56y + 11$$

$$x = \frac{56y + 11}{39} = y + \frac{17y + 11}{39}$$

Nun sey $\frac{17y + 11}{39} = A$

$$17y = 39A - 11$$

$$y = 2A + \frac{5A - 11}{17}$$

ferner $\frac{5A - 11}{17} = B$

$$5A = 17B + 11$$

$$A = 3B + 2 + \frac{2B + 1}{5}$$

eben so $\frac{2B + 1}{5} = C$

$$2B = 5C - 1$$

$$B = 2C + \frac{C - 1}{2}$$

endlich sey noch $\frac{C - 1}{2} = D$

so ist $C = 2D + 1$

Substituirt man nun rückwärts nach einander in die mit Klammern unterstrichenen Ausdrücke, so erhält man:

$$B = 2(2D + 1) + \frac{2D + 1 - 1}{2} = \underbrace{5D + 2}$$

$$A = 3(5D + 2) + \frac{2(5D + 2) + 1}{5} + 2 =$$
$$= 15D + 6 + 2 + 2D + 1 = \underbrace{17D + 9}$$

$$y = 2(17D + 9) + \frac{5(17D + 9) - 11}{17} =$$
$$= 34D + 18 - 5D + 2 = \underbrace{39D + 20}$$

$$x = 39D + 20 + \frac{17(39D + 20) + 11}{39} =$$
$$= 39D + 20 + 17D + 9 = \underbrace{56D + 29}$$

$$z = 39(56D + 29) + 16 = 2184D + 1131 + 16$$
$$= \underbrace{2184D + 1147.}$$

Oder auch für z

$$z = 56(39D + 20) + 27 = 2184D + 1120 + 27$$
$$= \underbrace{2184D + 1147.}$$

Aus dem Werthe von z ergiebt sich, daß für D jede beliebige ganze Zahl, und da 1147 positiv ist, auch Null angenommen werden kann: es kann jedoch für D kein negativer Werth angenommen werden, weil der Coëfficient von D größer ist, als die zuaddirte Zahl.

Betrachtet man die Werthe von z aus dieser und der vorigen Aufgabe, so ergiebt sich folgende Regel.

Ist die der zuletzt bleibenden und als willkührlich anzunehmenden positiven Größe zugefügte Zahl positiv, so kann jene Größe, jede Zahl selbst Null seyn; ist aber die zugefügte Zahl negativ, so kann jene Größe, wie oben D, nur positiv, und auch nicht Null seyn, und die Auflösungen fangen damit an, daß diese Größe = 1 ist.

Es sey $D = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots$
so ist $z = 1147, 3331, 5515, 7699 \ldots$

Hier ergiebt sich, so wie auch aus dem Werthe von z, daß die Reihe mit einem Anwachs von 2184 in das Unendliche zunimmt.

§. 208.

(No. 20.)

Eine kürzere Art, solche Aufgaben zu lösen, soll an Folgenden gezeigt werden.

Aufgabe 9. Man suche Zahlen, die durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt, 5 übrig lassen. Hier ist

$$\underbrace{11x + 3 = z \text{ und } 19y + 5 = z}$$

$$11x + 3 = 19y + 5$$

$$11x = 19y + 2$$

$$\underbrace{x = y + \frac{8y + 2}{11}} \qquad \text{A.}$$

Nun sey $\frac{8y + 2}{11} = A$

$$8y = 11A - 2$$

$$\underbrace{y = A + \frac{3A - 2}{8}} \qquad \text{B.}$$

ferner $\frac{3A - 2}{8} = B$

$$3A = 8B + 2$$

$$A = \frac{8B + 2}{3}$$

$$\underbrace{A = 2B + \frac{2B + 2}{3}} \qquad \text{C.}$$

Auch sey $\frac{2B+2}{3} = C$

$$2B = 3C - 2$$

$$B = C + \frac{C-2}{2} \qquad D.$$

endlich $\frac{C-2}{2} = D$

$$C = 2D + 2 \qquad E.$$

Betrachten wir die Werthe von x, y, A, B und C aus den Gleichungen A, B, C, D und E. So ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 1 \,.\, y + A \\ \text{II.} & y = 1 \,.\, A + B \\ \text{III.} & A = 2 \,.\, B + C \\ \text{IV.} & B = 1 \,.\, C + D \\ \text{V.} & C = 2 \,.\, D + 2 \end{array}$$

Die hier gefundenen Coëfficienten lassen sich aus der Gleichung

$$11x = 19y + 2$$

auch auf folgende Art sehr leicht finden.

Man verfahre, als wenn man der Zahlen 11 und 19 größtes gemeinschaftliches Maaß suchte, so sind die Quotienten die gesuchten Coëfficienten für y, A, B, C und D; nämlich

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & \\ 19 & : & 11 & : & 8 & : & 3 & : & 2 & : & 1 \\ 11 & & 8 & & 6 & & 2 & & 2 & & \\ \hline 8 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Hierbei ist nun noch Folgendes zu bemerken:

Oben in Gleichung A war 2 positiv, in B negativ, und so wechselte das Zeichen von 2 ab; woraus mit Hülfe des Vorigen sich folgende Regel ziehen läßt.

Die gefundenen Quotienten gebe man den Größen y, A, B, C . . . . . als Coëfficienten bei; zu der letz-

ten Größe füge man die Zahl, die schon in der Gleichung vorhanden war, und zwar mit ihrem ursprünglichen Zeichen, wenn die Anzahl der Quotienten eine ungerade Zahl, und mit entgegengesetzten Zeichen, wenn die Anzahl der Quotienten eine gerade Zahl ist.

Durch Substitution von V in IV, von IV in III u. s. w., und zuletzt von I in eine der beiden Fundamentalgleichungen findet man:

V in IV, $B = 2D + 2 + D = \underbrace{3D + 2}$

IV in III, $A = 2(3D + 2) + 2D + 2 =$
$= 6D + 4 + 2D + 2 = \underbrace{8D + 6}$

III in II, $y = 8D + 6 + 3D + 2 = \underbrace{11D + 8}$

II in I, $x = 11D + 8 + 8D + 6 = \underbrace{19D + 14}$

und von I in $z = 11x + 3$
oder in $z = 19y + 5$

$z = 11(19D + 14) + 3 = 209D + 154 + 3 =$
$= 209D + 157$ oder

$z = 19(11D + 8) + 5 = 209D + 152 + 5 =$
$= 209D + 157.$

Der Werth von z giebt zu erkennen, daß für D jede positive Größe und auch Null angenommen werden kann.

Ist nun $D = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$
so ist $z = 157, \quad 366, \quad 576, \quad 784 \ldots.$

Aufgabe 10. nach der kürzeren Art aufgelös't.

Man suche Zahlen, die durch 5 dividirt 2, und durch 8 dividirt 4 übrig lassen.

So ist $\underbrace{5x + 2 = z \text{ und } 8y + 4 = z}$

$8y + 4 = 5x + 2$

$\underbrace{5x = 8y + 2}$

Von 5 und 8 das größte gemeinschaftliche Maaß gesucht:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 2 & \\ 8 & : & 5 & : & 3 & : & 2 & : & 1 \\ 5 & & 3 & & 2 & & 2 & & \\ \hline 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Woraus

$$x = 1y + A$$
$$y = 1A + B$$
$$A = 1B + C$$
$$B = 2C - 2$$

Hier muß 2 negativ genommen werden, weil die Anzahl der Quotienten gerade ist.

Durch Substituirung erhält man nun

$$B = 2C - 2$$
$$A = 2C - 2 + C = \underbrace{3C - 2}$$
$$y = 3C - 2 + 2C - 2 = \underbrace{5C - 4}$$
$$x = 5C - 4 + 3C - 2 = \underbrace{8C - 6}$$
$$z = 8(5C - 4) + 4 = \underbrace{40C - 28}$$

wenn für C jede beliebige positive Zahl (Null aber nicht) angenommen werden kann.

Ist nun $C = 1, \; 2, \; 3, \; 4 \ldots$
so ist $z = 12, \; 52, \; 92, \; 132$

Man sieht hier deutlich, wie kurz das Verfahren und wie wenigen Irrungen diese Rechnungsart unterworfen ist.

§. 209.

(No. 21.)

Man kann das vorhergehende Verfahren auch auf Aufgaben dieser Art mit vier unbekannten Größen anwenden.

Aufgabe 11. Man suche Zahlen, die durch 3 dividirt 1, durch 5 dividirt 3, und durch 7 dividirt 6 zum Reste lassen:

So ist

$$\underbrace{3x + 1 = u}_{\text{A.}}, \quad \underbrace{5y + 3 = u}_{\text{B.}}, \quad \underbrace{7z + 6 = u}_{\text{C.}}.$$

Man lasse die Gleichung C zuerst gänzlich außer Acht, und verfahre mit A und B, wie eben gezeigt worden. Nämlich

$$\frac{3x + 1 = 5y + 3}{\underbrace{3x = 5y + 2}_{\text{D.}}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 1 & & 2 & \\ 5 & : & 3 & : & 2 & : & 1 \\ 3 & & 2 & & 2 & & \\ \hline 2 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Folglich $x = 1y + A$

$y = 1A + B$

$A = 2B + 2$

$+ 2$ weil die Anzahl der Quotienten ungerade ist. Nun ist

$$y = 2B + 2 + B = \underbrace{3B + 2}$$

$$x = 3B + 2 + 2B + 2 = \underbrace{5B + 4}$$

endlich $u = 3(5B + 4) + 1 = \underbrace{15B + 13}$ E.

Da man hier nun schon die Gleichungen A und B vereinigt hat, so verfahre man mit C und E auf dieselbe Art. Nämlich

da $u = 15B + 13$ und $u = 7z + 6$

so ist auch $15B + 13 = 7Z + 6$

oder $7Z + 6 = 15B + 13$

$$\underbrace{7Z = 15B + 7} \quad \text{F.}$$

Man suche wieder, wie vorher, die Coëfficienten.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 7 & \\ 15 & : & 7 & : & 1 \\ 14 & & 7 & & \\ \hline 1 & & 0 & & \end{array}$$

So ist nun

$$Z = 2B + C$$
$$B = 7C - 7$$

So folgt nun

$$Z = 2(7C - 7) + C = 15C - 14$$
$$u = 7(15C - 14) + 6 = 105C - 92.$$

wo wieder C jede ganze positive Zahl anzeigen kann.

Es sey $C = 1, \; 2, \; 3, \; 4 \ldots$
so ist $u = 13, \; 118, \; 223, \; 328 \ldots$
welche Reihe mit dem Anwachs von 105 in das Unendliche fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 12. Wollte man der 9ten Aufgabe noch die Bedingung zufügen, daß jene Zahlen nicht allein durch 11 dividirt 3, durch 19 dividirt 5, sondern auch durch 29 dividirt 10 übrig lassen: so sind dort in der 9ten Aufgabe bereits die ersten Bedingungen entwickelt worden. Es war nämlich

$$Z = 209D + 157 \text{ und hier}$$
ist noch $Z = 29E + 10$
folglich $29E + 10 = 209D + 157$
$$29E = 209D + 147$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 7 & & 4 & & 1 & & 5 & \\ 209 & : & 29 & : & 6 & : & 5 & : & 1 \\ 203 & & 24 & & 5 & & 5 & & \\ \hline 6 & & 5 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

So ist jetzt

$$\begin{aligned} E &= 7D + F \\ D &= 4F + G \\ F &= 1G + H \\ G &= 5H - 147 \end{aligned}$$

Also nun

$$F = 5H - 147 + H = \underbrace{6H - 147}$$

$$D = 4(6H - 147) + 5H - 147 =$$
$$= 24H - 588 + 5H - 147 = \underbrace{29H - 735}$$

$$E = 7(29H - 735) + 6H - 147 =$$
$$= 203H - 5145 + 6H - 147 = \underbrace{209H - 5292}$$

$$Z = 29(209H - 5292) + 10 =$$
$$= 6061H - 153468 + 10 = \underbrace{6061H - 153458}$$

Untersucht man den Werth von Z, so ergiebt sich, daß 26 die geringste Zahl ist, welche für H angenommen werden kann, ohne Z negativ zu erhalten.

Es sey $H = 26, \quad 27, \quad 28 \ldots$

so ist $Z = 4128, \quad 10189, \quad 16250 \ldots$

welche Reihe mit dem Anwachs von 6061 in's Unendliche fortgesetzt werden kann.

§. 210.

(No. 22.)

Aufgaben, wie die vorige, können auch noch auf folgende Art aufgelöset werden.

Aufgabe 11 mag hier wieder dienen, um auf diese Art aufgelöset zu werden.

Zahlen zu finden, die durch 3 dividirt 1, durch 5 dividirt 3, und durch 7 dividirt 6 übrig lassen.

Die gesuchte Zahl sey $= x$, so sind $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{7}$ ganze Zahlen mit einem angehängten ächten Bruche; hingegen sind

I. $\frac{x-1}{3}$, II. $\frac{x-3}{5}$, III. $\frac{x-6}{7}$ ganze Zahlen.

Man setze nun

$$\frac{x-1}{3} = A$$

$$\underbrace{x = 3A + 1} \qquad \text{A.}$$

Diesen Werth von x stelle man in den Ausdruck II., so erhält man

$$\frac{3A + 1 - 3}{5} = \frac{3A - 2}{5}$$

welches ebenfalls eine ganze Zahl seyn muß.

Nun sey $\frac{3A - 2}{5} = B$

$$3A - 2 = 5B$$

$$3A = 5B + 2$$

$$\underbrace{A = B + \frac{2B + 2}{3}} \qquad \text{B.}$$

ferner $\frac{2B + 2}{3} = C$

$$2B = 3C - 2$$

$$B = C + \frac{C - 2}{2} \qquad \text{C.}$$

$$\frac{C - 2}{2} = D$$

$$\underbrace{C = 2D + 2}$$

Diesen Werth in die Gleichung C. u. s. f. weiter substituirt, giebt

$$B = 2D + 2 + \frac{2D + 2 - 2}{2} = \underbrace{3D + 2}$$

$$A = 3D + 2 + \frac{6D + 4 + 2}{3} = \underbrace{5D + 4}$$

$$x = 3(5D + 4) + 1 = \underbrace{15D + 13} \qquad \text{D.}$$

nun stelle man diesen Werth von x in den Ausdruck III., so ist

$$\frac{15D + 13 - 6}{7} = \frac{15D + 7}{7}$$

Nun setze man noch

$$\frac{15D + 7}{7} = E$$

$$15D = 7E - 7$$

$$D = \frac{7E - 7}{15} \qquad \text{E.}$$

$$\frac{7E - 7}{15} = F$$

$$7E = 15F + 7$$

$$E = 2F + 1 + \frac{F}{7} \qquad \text{F.}$$

$$\frac{F}{7} = G$$

$$F = 7G$$

Den letzten Werth in E substituirt, giebt

$$E = 14\ G + 1 + \frac{7G}{7} = 15G + 1$$

Durch weitere Substitution in E erhält man

$$D = \frac{7(15G + 1) - 7}{15} = 7G$$

und endlich noch in D. substituirt, so ist

$$x = 15\ .\ 7G + 13 = 105G + 13$$

Nun kann für G jede positive Zahl, und da 13 positiv ist, auch Null angenommen werden, wodurch man dieselben Werthe erhält, wie bei der früheren Auflösung der Aufgabe.

Anmerkung. Obgleich die letzte Auflösung etwas weitläuftiger, als die vorige, so halte ich es doch nicht für unnöthig, auch diese zu zeigen, da Anfänger sich nicht genug in der Analysis üben können.

§. 211.

(No. 23.)

Bei Gleichungen von der Form

$$ax + c = by \text{ oder}$$
$$ax = by - c$$

dürfen a und b keinen gemeinschaftlichen Factor haben, wenn solcher nicht auch Factor von c ist; ist letzteres der Fall, so läßt sich die ganze Gleichung noch abkürzen: haben aber a und b einen gemeinschaftlichen Factor, und c nicht auch, so läßt sich x und y nicht in ganzen Zahlen finden. Z. B.

$$10x = 25y - 5$$

hier kann die ganze Gleichung durch 5 dividirt, und dann weiter fortgefahren werden; nämlich mit der Gleichung

$$2x = 5y - 1$$

Wäre aber $10x = 25y - 2$ gegeben,

so ist $x = \frac{25y - 2}{10}$

$$x = 2y + \frac{5y - 2}{10}$$

nun sey $\frac{5y - 2}{10} = A$

$$5y = 10A + 2$$

$$y = 2A + \frac{2}{5}$$

Da nun A eine ganze Zahl seyn muß, so kann hier y nicht in ganzen Zahlen gefunden werden, und eben so wenig x.

Erweisen läßt sich diese Wahrheit sehr leicht auf folgende Art:

Es sey wieder

$$ax = by - c$$

wo a, b und c ganze Zahlen, a und b aber durch α, und c nicht durch α theilbar ist: es sey aber

$$\frac{a}{\alpha} = \beta \text{ und } \frac{b}{\alpha} = \gamma;$$

so ist $$\frac{ax}{\alpha} = \frac{by}{\alpha} - \frac{c}{\alpha}$$

wenn die ganze Gleichung durch α dividirt wird; es ist also nun

$$\beta x = \gamma y - \frac{c}{a}$$

und $$\frac{c}{\alpha} = \gamma y - \beta x \quad \text{A.}$$

Da nun y und x, und auch γ und β ganze Zahlen sind, so ist auch die Differenz ihrer Producte eine ganze Zahl, da nun $\frac{c}{\alpha}$ ein Bruch seyn soll, so ist der Ausdruck A. unmöglich, und somit das Gesagte erwiesen.

§. 212.

(No. 24.)

Aufgabe 13. Dreißig Personen, Männer, Frauen und Kinder, zehren in einem Wirthshause und haben 50 Thaler zu entrichten: ein Mann bezahlt 3, eine Frau 2, ein Kind 1 Thaler. Wie viel waren von jeder Gattung?

x Männer, y Weiber, z Kinder; so ist

$$x + y + z = 30, \quad 3x + 2y + z = 50$$

$$\text{I. } x = 30 - y - z \quad \text{II. } x = \frac{50 - 2y - z}{3}$$

$$90 - 3y - 3z = 50 - 2y - z$$

$$90 - 50 - 2z = y$$

$$\text{III. } 40 - 2z = y$$

Diesen Werth von y in I. substituirt, giebt

$$x = 30 - (40 - 2z) - z = 30 - 40 + 2z - z$$
$$= z - 10 \text{ (IV.)}$$

z kann nun in III. und IV. nach Belieben angenommen werden; jedoch muß $z < 20$, weil sonst $y = 0$, oder negativ würde; auch muß $z > 10$ seyn, weil sonst x negativ würde. Es kann also z höchstens 19, und wenigstens 11 seyn.

Ist also

	$z =$	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19.
so ist	$y =$	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2.
und	$x =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

Aufgabe 14. Drei Zahlen sollen folgende Eigenschaften haben: zu dem Dreifachen der ersten, das Fünffache der zweiten addirt, und das Doppelte der letzten abgezogen, giebt 312; addirt man aber zum Vierfachen der ersten, das Dreifache der zweiten, und zieht das Doppelte der dritten ab, so erhält man 174. Welche Zahlen sind es?

$$3x + 5y - 2z = 312; \quad 4x + 3y - 2z = 174$$

$$x = \frac{312 - 5y + 2z}{3} \qquad x = \frac{174 - 3y + 2z}{4}$$

$$1248 - 20y + 8z = 522 - 9y + 6z$$

$$726 + 2z = 11y$$

$$2z = 11y - 726$$

$$z = 5y - 363 + \frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2} = A$$

$$y = 2A$$

Und nun

$$z = 5 \,.\, 2A - 363 + \frac{2A}{2} = 11A - 363$$

$$x = \frac{312 - 10A + 22A - 726}{3}$$

$$x = \frac{12A - 414}{3} = 4A - 138$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich, daß $A > 34$, also wenigstens 35 seyn muß, wo sodann die Auflösungen in das Unendliche fortlaufen.

Es sey	A =	35,	36,	37,	38,	39	. . .
so ist	z =	2,	6,	10,	14,	18	. . .
und	y =	70,	72,	74,	76,	78	. . .
und	x =	22,	33,	44,	55,	66	. . .

Aufgabe 15. Ein Silberarbeiter hat eine Mark 14löthiges, eine Mark 11löthiges und eine Mark 9löthiges Silber: er soll 30 Loth 12löthiges mischen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

x Loth 14löthiges, y Loth 11löthiges, z Loth 9löthiges.

So ist

$x + y + z = 30,$ und $14x + 11y + 9z = 360$

$$\underbrace{x = 30 - y - z}_{\mathfrak{A}.} \qquad \underbrace{x = \frac{360 - 11y - 9z}{14}}_{\mathfrak{B}.}$$

$$30 - y - z = \frac{360 - 11y - 9z}{14}$$

$$420 - 14y - 14z = 360 - 11y - 9z$$

$$\underbrace{60 - 5z = 3y}$$

$$y = \frac{60 - 5z}{3} = \underbrace{20 - z - \frac{2z}{3}}$$

$$\frac{-2z}{3} = A$$

$$2z = 3A$$

$$z = -A - \frac{A}{2}.$$

$$\frac{-A}{2} = B$$

$$\underbrace{A = -2B}$$

$$z = -(-2B) - \frac{-2B}{2} = \underbrace{2B + B = 3B}$$

$$y = 20 - 3B - \frac{6B}{3} = \underbrace{20 - 5B}$$

$$x = 30 - 3B - (20 - 5B) = 30 - 3B - 20 +$$
$$+ 5B = \underbrace{10 + 2B}$$

Aus der Aufgabe erhellet schon, daß keine unendliche Anzahl Auflösungen Statt finden kann; allein es ergiebt sich auch noch aus den Werthen von x, y und z: denn wenn $B > 3$ wäre, so würde $y =$ Null oder negativ; und wenn B negativ wäre, was wegen x und y mit Einschränkungen wohl anginge, so würde z negativ. Es finden daher nur die Auflösungen Statt, wo A 1, 2 und 3 ist.

Wenn nun	A	$=$	1,	2,	3.
so ist	x	$=$	12,	14,	16.
und	y	$=$	15,	10,	5.
und	z	$=$	3,	6,	9.

Um über solche Aufgaben die Probe zu machen, welche aus der Gleichung B. fließt, mache ich die Leser darauf aufmerksam, was ich bereits im II. Band bei ähnlichen (bestimmten) Aufgaben gesagt habe.

Anmerkung. Man thut sehr wohl, bei dem Substituiren immer beide Zeichen, nämlich das Additions- oder Subtractions-Zeichen des Ausdrucks, als auch das positive oder negative Zeichen, welche die zu substituirende Größe bei sich führt, anzusetzen; indem man ohne Befolgung dieser Vorschrift leicht irren kann.

Z. B. $A = 24 - B - C$

soll in dem Ausdruck $x = 37 - A$ substituirt werden; so ist

$$x = 37 - (24 - B - C) =$$
$$37 - 24 + B + C = 13 + B + C;$$

oder $A = -2 - B$ in dem Ausdruck

$x = 17 - A$, so ist

$$x = 17 - (-2 - B) = 17 + 2 - B$$
$$= 19 - B.$$

Aufgabe 16. Einer kauft 100 Stücke Vieh, und zwar ein Schwein für 10 Thlr., ein Kalb für 5, ein Schaaf für 2, und ein Lamm für $\frac{1}{2}$ Thaler. Wie viel von jeder Sorte können es seyn?

x Schweine, y Kälber, z Schaafe, u Lämmer.

$$\underbrace{x + y + z + u = 100;}_{\text{A.}} \quad \underbrace{10x + 5y + 2z + \tfrac{1}{2}u = 100;}_{\text{B.}}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 20x & + 10y & + 4z & + u & = 200 \\ \text{A)} & x & + y & + z & + u & = 100 \\ \text{Subtrahirt} & - & - & - & - & - \\ \text{Differenz} & 19x & + 9y & + 3z & & = 100 \end{array}$$

$$3z = 100 - 19x - 9y$$

$$z = \frac{100 - 19x - 9y}{3}$$

$$\text{C)} \quad \underbrace{z = 33 - 6x - 3y + \frac{1 - x}{3}}$$

Da nun z eine ganze Zahl seyn soll, so muß, da auch x und y ganze Zahlen sind, auch $\frac{1 - x}{3}$ und auch $\frac{x - 1}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Man setze deßhalb

$$\frac{x - 1}{3} = A$$

$$\underbrace{x = 3A + 1}$$

$$\text{und} \quad \underbrace{6x = 18A + 6}$$

Diese Werthe von x und $6x$ substituire man in die Gleichung C, so ist

$$z = 33 - (18A + 6) - 3y + \frac{1 - (3A + 1)}{3}$$

$$= 33 - 18A - 6 - 3y - A =$$

$$= \underbrace{27 - 19A - 3y} \quad \text{(D.}$$

endlich substituire man für x und z ihre Werthe in A., so ist

$$u = 100 - y - (27 - 19A - 3y) - (3A + 1)$$
$$u = 100 - y - 27 + 19A + 3y - 3A - 1$$
$$= \underbrace{72 + 16A + 2y}$$

Man kann nun die Werthe von A und y willkührlich annehmen, und x, z und u entwickeln; es muß jedoch wegen D. beobachtet werden, daß

$$19A + 3y < 27.$$

Es kann deßhalb, wenn $A = 0$, y höchstens 9 seyn, wo jedoch noch $z = 0$ wird; und wenn $A = 1$, so kann y höchstens 2 seyn, weil sonst diese Bedingung noch mehr überschritten würde, und y negativ erschiene, was nicht seyn kann.

Die Hauptformeln sind nun:

$x = 3A + 1$, $z = 27 - 19A - 3y$, und
$$u = 72 + 16A + 2y.$$

Nimmt man nun

$$\left.\begin{array}{ll} & A = 0 \\ \text{so ist} & x = 1 \\ \text{und} & z = 27 - 3y \\ \text{und} & u = 72 + 2y \end{array}\right\} \text{I.}$$

Nimmt man aber

$$\left.\begin{array}{ll} & A = 1 \\ \text{so ist} & x = 4 \\ \text{und} & z = 8 - 3y \\ \text{und} & u = 88 + 2y \end{array}\right\} \text{II.}$$

Aus I. fließen nun folgende 10 Auflösungen.

Wenn	$x =$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1.
und	$y =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
so ist	$z =$	27,	24,	21,	18,	15,	12,	9,	6,	3,	0.
und	$u =$	72,	74,	76,	78,	80,	82,	84,	86,	88,	90.

Ferner fließen aus II. noch folgende 3 Auflösungen.

Wenn	x	=	4,	4,	4.
und	y	=	0,	1,	2.
so ist	z	=	8,	5,	2.
und	u	=	88,	90,	92.

Es finden also im Ganzen für diese Aufgabe 13 Auflösungen statt, und wenn die, wo z und $y = 0$ sind, nicht gelten, so hat man im Ganzen nur 10 Auflösungen.

Wollte man $A = 2$ annehmen, so würde $x = 7$, $z = 27 - 19 \cdot 2 - 3y = 27 - 38 - 3y = -11 - 3y$, welches nicht seyn kann; und $u = 72 + 2y + 16 \cdot 2 = 72 + 32 + 2y = 104 + 2y$, welches ebenfalls nicht seyn kann, da die Zahl nicht über 100 seyn darf.

§. 213.

(No. 25.)

Aufgabe 17. Drei Zahlen zu finden, deren Summa gleich 15; die Summa der ersten und dritten aber gleich sey der Differenz, wenn man die erste von der zweiten abzieht.

1ste Zahl x, 2te Zahl y, 3te Zahl z.

$$x + y + z = 15 \qquad x + z = y - x$$

$$x = 15 - y - z \qquad 2x = y - z$$

$$x = \frac{y - z}{2}$$

$$15 - y - z = \frac{y - z}{2}$$

$$30 - 2y - 2z = y - z$$

$$30 - z = 3y$$

$$10 - \frac{z}{3} = y$$

Hier finden eine unendliche Anzahl Auflösungen statt, weil die Aufgabe keine ganzen Zahlen vorschreibt, mithin auch Brüche zuläßt.

Es sey $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots$

so ist $y = 9\frac{2}{3},\ 9\frac{1}{3},\ 9,\ 8\frac{2}{3},\ 8\frac{1}{3} \ldots$

und $x = 4\frac{1}{3},\ 3\frac{2}{3},\ 3,\ 2\frac{1}{3},\ 1\frac{2}{3} \ldots$

Oder

Es sey $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$
so ist $y = 9\frac{5}{6}, 9\frac{8}{9}, 9\frac{11}{12}, 9\frac{14}{15} \ldots$
und $x = 4\frac{2}{3}, 4\frac{7}{9}, 4\frac{10}{12}, 4\frac{13}{15} \ldots$

Aufgabe 18. Man suche vier Zahlen von folgenden Eigenschaften.

1) Ihre Summe sey = 18

2) Zur ersten das Doppelte der 2ten, das Dreifache der 3ten, und das Vierfache der 4ten addirt, kömmt 50 heraus. So ist

$$x + y + z + u = 18; \quad x + 2y + 3z + 4u = 50$$

$$x = 18 - y - z - u; \quad x = 50 - 2y - 3z - 4u$$

$$18 - y - z - u = 50 - 2y - 3z - 4u$$

$$y = 32 - 2z - 3u$$

Da hier weder ganze noch positive Zahlen verlangt werden, so kann für z und u jeder beliebige Werth angenommen werden, und die Aufgabe hat deßhalb eine unendliche Anzahl Auflösungen.

Man setze $z = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$
und $u = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$
so ist $y = 24, 19, 14, 9, 4 \ldots$
und $x = -9, -6, -3, 0, 3 \ldots$

Oder

Man setze $z = 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$
und $u = 7, 8, 9, 10, 11 \ldots$
so ist $y = 9, 6, 3, 0, -3 \ldots$
und $x = 1, 3, 5, 7, 9 \ldots$
u. s. w. u. s. w. u. s. w.

§. 214.

(No. 26.)

Ich darf nun wohl hoffen, durch das Vorhergehende den Anfängern hinlängliche Begriffe von den meisten Arten der unbestimmten Aufgaben und ihren Auflösungen beigebracht zu haben; so daß sie die Folgenden, wenn auch nicht sogleich ohne Hülfe, lösen, doch aber ihre Auflösungen verstehen können, und in ähnlichen Fällen sich darnach richten werden.

Aufgabe 18. Ein Kaufmann ist einem Bauer 100 Thlr. schuldig; der Bauer will dafür Taback nehmen, und der Kaufmann hat 2 Sorten ordinären Tabak, wo von der einen der Centner 9, und von der andern der Centner 7 Thaler kostet, wie viel kann er von jeder Sorte geben? So ist

$$9x + 7y = 100$$

$$y = \frac{100 - 9x}{7}$$

Wäre hier von lauter ganzen Centnern die Rede, so müßte die Auflösung weiter fortgesetzt werden, so wie in den früheren Aufgaben, oder x willkührlich, iedoch so angenommen werden, daß $\frac{100 - 9x}{7}$ eine ganze Zahl würde: da aber jene Bedingung nicht in der Aufgabe enthalten, so kann x ganz willkührlich angenommen werden, jedoch muß $9x < 100$, oder $x < \frac{100}{9}$ seyn, weil sonst y negativ werden würde: es ergiebt sich hieraus, daß x höchstens 11 seyn kann.

Wenn nun $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

so ist $y = 13,\ \frac{82}{7},\ \frac{73}{7},\ \frac{64}{7},\ \frac{55}{7},\ \frac{46}{7},\ \frac{37}{7},\ \frac{28}{7},\ \frac{19}{7},\ \frac{10}{7},\ \frac{1}{7}$

oder $y = 13,\ 11\frac{5}{7},\ 10\frac{3}{7},\ 9\frac{1}{7},\ 7\frac{6}{7},\ 6\frac{4}{7},\ 5\frac{2}{7},\ 4,\ 2\frac{5}{7},\ 1\frac{3}{7},\ \frac{1}{7}$.

Hieraus findet man, daß nur die 1ste und 8te Auflösung stattfände, wenn lauter ganze Centner verlangt würden.

Aufgabe 19. Man soll 2 Quadratzahlen finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ausmache. Welches sind die Wurzeln dieser Quadrate?

Die erste Wurzel sey $= x$
Die zweite Wurzel sey $= y$
Die Wurzel der Summe $= z$
So ist $x^2 + y^2 = z^2$

dieses ist mit 3 unbekannten Größen die einzige Gleichung, welche angesetzt werden kann.

Man nehme für z einen solchen Werth an, daß eine von den Größen x oder y, welches natürlich seyn muß, darin enthalten ist.

Es sey $z = A + y$ (A.

so ist $z^2 = A^2 + 2Ay + y^2$

diesen Werth in A substituirt, giebt

$$x^2 + y^2 = A^2 + 2Ay + y^2$$

Also $x^2 = A^2 + 2Ay$

hieraus entwickele man y, so ist

$$2Ay = x^2 - A^2$$

$$y = \frac{x^2 - A^2}{2A}$$

Diesen Werth in die Gleichung A. substituirt, so ist

$$z = A + \frac{x^2 - A^2}{2A}$$

$$z = \frac{2A^2 + x^2 - A^2}{2A}$$

$$z = \frac{A^2 + x^2}{2A}$$

Man kann nun für x und A jede beliebige positive Zahl annehmen; sollen aber die Quadrate lauter ganze

Zahlen seyn, so muß $x + A$ eine gerade Zahl, und x ein Vielfaches von A seyn: denn wenn x kein Vielfaches von A ist, so werden $x^2 + A^2$ und $x^2 - A^2$ nicht durch $2A$ theilbar werden.

Es sey nun	$A =$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1 . . .
und	$x =$	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15 . . .
so ist	$y =$	4,	12,	24,	40,	60,	84,	112 . . .
und	$z =$	5,	13,	25,	41,	61,	85,	113 . . .

Oder

Es sey	$A =$	2,	2,	2,	2 . . .
und	$x =$	4,	6,	8,	10 . . .
so ist	$y =$	3,	8,	17,	24 . . .
und	$z =$	5,	10,	15,	26 . . . u. s. w.

Will man jedoch auch gebrochene Werthe für y und z haben, so hat man nicht nöthig, sich an obige Richtschnur zu binden.

Z. B. Wenn $A = 1$, $x = 2$

so ist

$$z = \frac{x^2 + A^2}{2A} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

und

$$y = \frac{x^2 - A^2}{2A} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Es ist aber

$$\left[\frac{5}{2}\right]^2 = \left[\frac{3}{2}\right]^2 + \left[\,2\,\right]^2$$

d. i. $\frac{25}{4} = \frac{9}{4} + \frac{16}{4}$ u. s. w.

Aufgabe 20. Ein Viehhändler, welcher Ochsen hat, die er das Stück zu 50 Gulden rechnet, will mit einem andern, der Kühe zu 21, und Schweine zu 16 Gulden hat, tauschen, wie viel Stücke können sie einander von jeder Gattung geben?

Der 1ste giebt dem 2ten x Ochsen, und bekömmt dafür y Kühe und z Schweine. So ist

$$50x = 21y + 16z$$

$$21y = 50x - 16z$$

$$y = 2x + \frac{8x - 16z}{21} \qquad \text{𝔄.}$$

$$\frac{8x - 16z}{21} = A$$

$$8x = 21A + 16z$$

$$x = 2A + 2z + \frac{5A}{8} \qquad \text{𝔅.}$$

$$\frac{5A}{8} = B$$

$$A = \frac{8B}{5}$$

$$A = B + \frac{3B}{5} \qquad \text{ℭ.}$$

$$\frac{3B}{5} = C$$

$$3B = 5C$$

$$B = C + \frac{2C}{3} \qquad \text{𝔇.}$$

$$\frac{2C}{3} = D$$

$$2C = 3D$$

$$C = D + \frac{D}{2} \qquad \text{𝔈.}$$

$$\frac{D}{2} = E$$

$$D = 2E$$

Man substituire nun rückwärts nach einander in die Gleichungen 𝔈, 𝔇, ℭ, 𝔅, 𝔄, so erhält man:

$$C = 2E + \frac{2E}{2} = 3E$$

$$B = 3E + \frac{6E}{3} = 5E$$

$$A = 5E + \frac{15E}{5} = \underbrace{8E}$$

$$x = 16E + 2Z + \frac{40E}{8} = \underbrace{21E + 2Z}$$

$$y = 2(21E + 2Z) + \frac{8(21E + 2Z) - 16Z}{21}$$

$$= 42E + 4Z + 8E - \underbrace{50E + 4Z}$$

Es kann nun E und Z nach Belieben angenommen werden, jedoch kann wegen der Aufgabe kein gebrochener Werth Statt finden; auch kann E nicht eher negativ seyn, bis $Z > 12$, das ist Z wenigstens 13, weil sonst y negativ werden würde.

Es sey nun

	E =	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0 . . .	
und	Z =	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7 . . .	
so ist	x =	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14 . . .	
und	y =	4,	8,	12,	16,	20,	24,	28 . . .	

Oder es sey

	E =	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1 . . .
und	Z =	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8 . . .
so ist	x =	23,	25,	27,	29,	31,	33,	35,	37 . . .
und	y =	54,	58,	62,	66,	70,	74,	78,	82 . . .

Nähme man E negativ, z. B. es wäre

	E =	−1,	−1,	−1,	−1,	−1,	−1,	−1 . . .
und	Z =	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19 . . .
so ist	x =	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17 . . .
und	y =	2,	6,	10,	14,	18,	22,	26 . . .

und so kann diese Aufgabe eine unendliche Anzahl Auflösungen haben.

Aufgabe 21. Zwei Zahlen zu finden, bei welchen die Differenz der Kuben gleich der Differenz der Wurzeln. Hier ist

$$x^3 - y^3 = x - y$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{x - y}{x - y}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$y^2 + xy = 1 - x^2$$

y wird nun als unbekannte Größe, x aber als bekannte behandelt und erstere entwickelt.

$$y^2 + xy + (\tfrac{1}{2}x)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$y^2 + xy + (\tfrac{1}{2}x)^2 = 1 - \frac{3x^2}{4}$$

$$y + \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{4 - 3x^2}{4}}$$

$$y = \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2} \qquad \text{A.}$$

Um den hier erhaltenen irrationalen Ausdruck rational zu machen, nehme man an, es sey

$$\sqrt{4 - 3x^2} = nx - 2$$

welches immer Statt haben kann, da man sich für n jeden beliebigen Werth denken kann, daß die Gleichung richtig ist. So ist nun

$$4 - 3x^2 = (nx - 2)^2$$

$$4 - 3x^2 = n^2x^2 - 4nx + 4$$

$$n^2x^2 + 3x^2 - 4nx = 0$$

$$x^2(n^2 + 3) - 4nx = 0$$

$$x^2 - \frac{4n}{n^2 + 3}\,x = 0 \quad \left(\text{weil 0 dividirt durch jede Größe 0 bleibt.}\right)$$

$$x^2 - \frac{4n}{n^2 + 3}\cdot x + \left[\frac{2n}{n^2 + 3}\right]^2 = \left[\frac{2n}{n^2 + 3}\right]^2$$

$$x - \frac{2n}{n^2 + 3} = \frac{2n}{n^2 + 3}$$

$$x = \frac{2n}{n^2 + 3} + \frac{2n}{n^2 + 3}$$

$$x = \frac{4n}{n^2 + 3}$$

Diesen Werth substituire man in die Gleichung A., so ist

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \sqrt{4 - 3\left(\frac{4n}{n^2+3}\right)^2}\right] : 2$$

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \sqrt{4 - 3\left(\frac{16n^2}{n^4+6n^2+9}\right)}\right] : 2$$

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \sqrt{4 - \frac{48n^2}{n^4+6n^2+9}}\right] : 2$$

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \sqrt{\frac{4n^4+24n^2+36 \quad 28n^2}{n^4+6n^2+9}}\right] : 2$$

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \sqrt{\frac{4n^4-24n^2+36}{n^4+6n^2+9}}\right] : 2$$

$$y = \left[-\frac{4n}{n^2+3} + \frac{2n^2-6}{n^2+3}\right] : 2$$

$$y = \left[\frac{-4n+2n^2-6}{n^2+3}\right] : 2$$

$$y = \left[\frac{2n^2-4n-6}{n^2+3}\right] : 2$$

$$y = \frac{n^2-2n-3}{n^2+3}$$

Man kann nun für n beliebige Werthe annehmen, und so die Werthe von x und y entwickeln. Z. B.

Es sey $n = 1$, so ist $x = 1$, $y = -1$

$$(1)^3 - (-1)^3 = 1 + 1 = 2$$

und $1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

Oder $n = 2$, so ist $x = \frac{8}{7}$, und $y = -\frac{3}{7}$

$$\left[\frac{8}{7}\right]^3 - \left[-\frac{3}{7}\right]^3 = \frac{512}{343} + \frac{27}{343} = \frac{539}{343} =$$

$$\frac{539 : 49}{343 : 49} = \frac{11}{7};$$

$$\frac{8}{7} - \left[-\frac{3}{7}\right] - \frac{8}{7} + \frac{3}{7} = \frac{11}{7}.$$

Aufgabe 22. Drei Zahlen zu finden, wo sowohl die Summe aller drei, als auch von jeden zweien allein ein vollkommenes Quadrat ausmachen.

Die erste Zahl sey $= x$
Die zweite Zahl sey $= y$
Die dritte Zahl sey $= z$

So ist ihre Summe $= x + y + z$;

Da nun dieses ein Quadrat seyn muß, so sey die Wurzel desselben $= u$.

So ist nun $x + y + z = u^2$

Es sollen aber auch

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y \\ \text{II.} & y + z \\ \text{III.} & x + z \end{array}\right\} \text{vollkommene Quadrate seyn.}$$

So sey deßhalb

die Wurzel d. Quad. I. $= r$ so ist $x + y = r^2$
die Wurzel d. Quad. II. $= t$ so ist $y + z = t^2$
die Wurzel d. Quad. III. $= s$ so ist $x + z = s^2$

Hier hat man also 7 unbekannte Größen und nur 4 Gleichungen.

Aus solchen Aufgaben läßt sich Nichts entwickeln, wenn man nicht noch einige Bedingungen, die Statt haben könnten, hinzufügt. Z. B.

1) r sey $= u - 1$, und
2) s sey $= r - 1$

so ist auch $s = (u - 1) - 1 = u - 2$.

Woraus man nun folgende Gleichungen erhält.

$$\underbrace{x + y + z = u^2} \quad \text{A.}$$

$$x + y = r^2$$
$$x + y = (u - 1)^2$$
$$\underbrace{x + y = u^2 - 2u + 1} \quad \text{B.}$$

$$x + z = s^2$$
$$x + z = (r - 1)^2$$
$$x + z = (u - 2)^2$$
$$x + z = u^2 - 4u + 4 \qquad \text{C.}$$

$$y + z = t^2 \qquad \text{D.}$$

Man substituire nun den Werth von $x + y = r^2 = u^2 - 2u + 1$ aus B. in A., so ist

$$u^2 - 2u + 1 + z = u^2$$
$$z - 2u + 1 = 0$$
$$z = 2u - 1 \qquad \text{E.}$$

Ferner substituire man den Werth von $x + z$ aus C. in A., so ist

$$u^2 - 4u + 4 + y = u^2$$
$$4 - 4u + y = 0$$
$$y = 4u - 4 \qquad \text{F.}$$

Auch substituire man den Werth von z aus E. in C., so ist

$$x + 2u - 1 = u^2 - 4u + 4$$
$$x = u^2 - 4u + 4 - 2u + 1$$
$$x = (u - 2)^2 - (2u - 1) \qquad \text{G.}$$

Endlich substituire man den Werth von y und z aus E. und F. in die Gleichung D., so ist

$$2u - 1 + 4u - 4 = t^2$$
$$6u - 5 = t^2$$
$$\sqrt{6u - 5} = t \qquad \text{H.}$$

Man suche nun für u einen solchen Werth, daß $6u - 5$ ein rationales Quadrat wird und die Wurzel gezogen werden kann.

3. B. $\underbrace{u = 5}$, so ist

$$t = \sqrt{6 \cdot 5 - 5} = \sqrt{25} = 5$$
$$z = 2u - 1 = 10 - 1 = 9$$
$$y = 4u - 4 = 20 - 4 = 16$$
$$x = 3^2 - (10 - 1) = 9 - 9 = 0.$$

Nun ist

$$x + y + z = u^2$$
$$0 + 16 + 9 = 5^2$$

$$x + y = r^2$$
$$0 + 16 = 4^2, \quad r = 4$$

$$x + z = ſ^2$$
$$0 + 9 = ſ^2, \quad ſ = 3$$

$$x + z = t^2$$
$$16 + 9 = 5^2, \quad t = 5.$$

Oder wenn man setzt

$$\underbrace{u = 9}$$

so findet man

$$t = 7, \text{ und } r = 8$$
$$z = 17, \quad ſ = 7$$
$$y = 32$$
$$x = 32.$$

Oder $\underbrace{u = 21}$

so ist $t = 5, \quad r = 20$

$$z = 41, \quad ſ = 19$$
$$y = 80$$
$$x = 320.$$

Eben so kann man auch für u gebrochene Werthe annehmen, wenn nur obige Bedingung erfüllt wird.

3. B. $u = \frac{3}{2}$ so ist

$$t = \sqrt{6 \cdot \frac{3}{2} - 5} = \sqrt{\frac{18}{2} - \frac{10}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$z = 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$y = 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{12}{2} - 4 = 6 - 4 = 2;$$

$$x = \left[\frac{1}{2}\right]^2 - \left[\frac{6}{2} - 1\right]^2 = \frac{1}{4} - 2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = - \frac{7}{4};$$

$$x + y + z = 2 + 2 - \frac{7}{4} = \frac{16}{4} - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

$$x + z = 2 - \frac{7}{4} = \frac{8}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}; \; s = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 2 - \frac{7}{4} = \frac{8}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}; \; r = \frac{1}{2}$$

$$y + z = 2 + 2 = 4 \quad . \quad . \quad . \quad t = 2.$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

§. 215.

(No. 27.)

Aufgabe 23. Zwei ganze und positive Zahlen zu finden, welche so beschaffen sind, daß, wenn die eine zum Quadrat der anderen addirt wird, ein Quadrat entsteht, dessen Wurzel die Differenz beider Zahlen ist.

Die eine Zahl sey x, die andere y; so ist

$$x + y^2 = (x - y)^2$$

Bei Auflösung dieser Gleichung erhält man

$$\underbrace{x = 2y + 1}$$

Hier kann y jeden positiven Werth haben, und selbst für $y = 0$, ist die Gleichung richtig.

Wenn $y = 0, 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . .$
so ist $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 . .$

Aufgabe 24. Zahlen zu finden, die durch 8 getheilt aufgehen, durch 9 getheilt, 7 zum Reste lassen.

Wenn x die Zahl, so ist

$$\frac{x}{8} = y, \text{ und } \frac{x}{9} = z + \frac{7}{9}$$

Man erhält hier, wenn man nach früheren Beispielen verfährt

$$x = 72A - 56$$

wo für A jeder ganze und positive Werth angenommen werden kann.

Wenn $A = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 \, . \, .$
so ist $x = 16, \quad 88, \quad 160, \quad 232, \quad 304 \, . \, .$

Aufgabe 25. Man theile 120 in drei Theile, daß, wenn man den ersten Theil mit 6, den anderen mit 5, und den dritten mit 4 multiplicirt, und die Producte addirt, 560 herauskömmt. Welches sind die Theile?

Es seyen die Theile x, y, z
$6x + 5y + 4z = 560$ und $x + y + z = 120$
woraus man erhält

$$z = 80 + A$$
$$y = -2A$$
$$x = 40 + A$$

Aus dem Werth von y ergiebt sich, daß A negativ werden muß, weil außerdem y negativ würde; es kann aber auch A nicht größer als -39 seyn, weil sonst $x = 0$ oder negativ würde: es finden also die Auflösungen Statt, wo $A = -39 - 38, -37 \, . \, -1$ ist.

Wenn $A =$	-39,	-38,	-37,	-36	. .	-1
so ist $y =$	78,	76,	74,	72	. .	2
und $x =$	1,	2,	3,	4	. .	39
und $z =$	41,	42,	43,	44	. .	79
Summa	120,	120,	120,	120	. .	120

Aufgabe 26. Zwei Kaufleute A und B haben verschiedene Sorten von Tabaksdosen. A hat u Stück von

einer, x von der andern, und z von der dritten Sorte. B hat y Stück von einer Sorte, die er zu 7 Thaler das Stück verkauft. Verkauft nun A seinen Vorrath der ersten Sorte für 3 Thaler das Stück, und den Vorrath der zweiten für 5 Thaler, so lös't er aus beiden Sorten 155 Thaler. Setzt er den Preis der ersten Sorte auf 5 Thaler, so muß B ihm auf den Vorrath seiner Sorte 179 Thaler zugeben: verkauft aber A seine erste Sorte für 4 Thaler das Stück, und die dritte für 7 Thaler, so bekömmt er für beide Sorten 174 Thaler. Wie viel waren Dosen von jeder Sorte?

Hier erhält man die Gleichungen

$$3w + 5x = 155;\ 5w = 7y + 179;\ 4w + 7z = 174.$$

Durch die vorgeschriebene Art zu entwickeln, erhält man folgende Werthe

$$\underbrace{\begin{aligned} x &= 21B - 14 \\ z &= 20B - 18 \\ y &= 28 - 25B \\ w &= 75 - 35B \end{aligned}}$$

Aus den Werthen von x und y ergiebt sich, daß B positiv, aus dem Werthe von y aber, daß $B < 2$ seyn muß; es kann also bloß der Werth von 1 für B stattfinden: man erhält sodann

$$w = 40,\quad x = 7,\quad z = 2,\quad y = 3.$$

§. 216.

(No. 28.)

Man stößt zuweilen auf Aufgaben, die bestimmt zu seyn scheinen, und doch unbestimmt sind, und erst dann bestimmt werden, wenn noch eine Bedingung zugefügt wird.

So hat, z. B., Uflakker in seinem Exempelbuch aus Versehen die 134. Aufgabe S. 29. als bestimmte Auf-

gabe niedergeschrieben; die es unter diesen Umständen aber noch nicht ist. Es ist folgende:

Aufgabe. Ich habe eine Blume, deren Namen aus vier Buchstaben besteht. Addirt man die Stellen des Alphabets, worin sie sich befinden, so kömmt 54. Die Stellen der beiden ersten addirt geben 31, die Stellen der ersten und dritten 35, und der Unterschied der ersten und letzten 12. Wie heißt die Blume?

Hier stößt man auf folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y + z + w = 54; \\ \text{II.} & x + y = 31; \\ \text{III.} & x + z = 35; \\ \text{IV.} & x - w = 12. \end{array}$$

Da man hier vier unbekannte Größen und auch vier Gleichungen hat, so scheint die Aufgabe bestimmt zu seyn; allein sie ist es nicht, weil die erste Gleichung schon in den übrigen enthalten ist; welches sich leicht auf folgende Art darthun läßt.

$$\begin{array}{lrl} \text{Gleichung III.} & x + z = 35 & \\ \text{Gleichung IV.} & x - w = 12 & \text{subtrahirt.} \\ & - \;\; + \;\; - & \\ \hline & z + w = 23 & \\ \text{Gleichung II.} & x + y = 31 & \text{addirt.} \\ \hline \end{array}$$

$$x + y + z + w = 54 = \text{Gleichung I.}$$

Man sieht hieraus, daß das Obige seine Richtigkeit hat.

Würde man aber die letzte Bedingung für Gleichung IV so stellen: die Summe der ersten und vierten Stelle sey $= 22$, so wird die Aufgabe als bestimmt sich lösen lassen: man hat nun

$$\text{I. } x + y + z + w = 54;$$
$$\text{II. } x + y = 31;$$
$$\text{III. } x + z = 35;$$
$$\text{IV. } x + w = 22;$$

Aus I folgt

$$x = 54 - y - z - w \quad \text{(V.}$$

aus II folgt

$$x = 31 - y \quad \text{(VI.}$$

aus III folgt

$$x = 35 - z \quad \text{(VII.}$$

aus IV folgt

$$x = 22 - w \quad \text{(VIII.}$$

Ferner ist nun

$$54 - y - z - w = 31 - y; \quad 25 - z = 22 - w.$$
$$23 - z = w \quad \text{(IX.} \qquad w = z - 13 \quad \text{(X.}$$

Also nun

$$23 - z = z - 23$$
$$36 = 2z$$
$$18 = z$$

Diesen Werth in *X* substituirt, giebt

$$w = z - 13 = 5.$$

Diesen Werth in VIII.

$$x = 22 - w = 22 - 5 = 17$$

endlich diesen Werth in VI.

$$17 = 31 - y$$
$$y = 31 - 17 = 14.$$

Es ist nun der 5te Buchstabe im Alphabet, *e*, der 14te *o*, der 17te *r*, und der 18te *s*, mithin die Blume Rose.

Eine ähnliche Aufgabe, die unbestimmt ist, und vermöge ihres Platzes, wo sie steht, bestimmt seyn sollte, ist Nro. 13. S. 155. in Meyer Hirsch's Sammlung von Beispielen u. s. w.; wo ebenfalls eine Bedingung fehlt, wenn die Aufgabe nur eine Auflösung haben soll.

Anmerkung. Wer über unbestimmte Analysis noch mehr studieren will, dem empfehle ich Euler's Anleitung zur Algebra, oder in Ermangelung dieses Werks, Ebert's Auszug aus Euler.

§. 217.

(No 29.)

Endlich giebt es noch Aufgaben, die man unmögliche nennt; das ist solche, wo man bei Entwickelung der unbekannten Größen auf eine unmögliche Größe, z. B. $x = \sqrt{-5}$, oder bei Größen, die nicht gebrochen vorgestellt werden können, auf Brüche, kurz auf irgend etwas Ungereimtes stößt.

Solche Aufgaben kommen jedoch in der Praxis nicht oft vor, und wenn es der Fall ist, so ist dieses ein hinlänglicher Beweis, daß die Bedingungen der Aufgabe unthunlich oder unmöglich auszuführen sind.

Ich finde es für überflüssig, Beispiele darüber herzusetzen; und es kann Jeder sich solche selbst leicht geben, er darf nur die Bedingungen vorher nicht gehörig calculiren, so werden meistens solche Aufgaben erscheinen.

Achter Abschnitt.

Von den Reihen.

§. 218.

(No. 30.)

Eine Folge von Größen, die nach einem bestimmten Gesetze wachsen oder abnehmen, heißt eine Reihe oder Progression. Z. B.

A. 1, 3, 5, 7, 9, 11 ....

B. $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{3}{8}$ ....

C. a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$ ...

D. $x + 8y$, $x + 7y$, $x + 6y$, $x + 5y$, $x + 4y$ ...

und zwar sind A und C wachsende, B und D abnehmende Reihen.

Ist die Anzahl der Glieder einer Reihe bestimmt, so heißt sie eine endliche, im Gegentheil eine unendliche Reihe.

§. 219.

(No. 31.)

Schon an diesen Reihen ergiebt sich, daß sie sämmtlich leicht fortgesetzt werden können, sobald nur das erste Glied, und das Gesetz, nach welchem sie wachsen oder abnehmen, bekannt ist. Man sieht aber auch, daß es sehr

mühsam seyn würde, durch Fortsetzung solcher Reihen, z. B. das 100ste, 200ste und noch spätere Glieder einer Reihe anzugeben; und noch beschwerlicher würde es seyn, die Summe von so vielen Gliedern zu bestimmen.

Gesetzt, es wäre folgende Aufgabe gegeben:

Eine Gemeinde, die im Gebirge wohnt, läßt einen Brunnen graben, um nicht mehr das Wasser mühsam aus dem Thale hinauf zu tragen; der Brunnengräber verlangt für den ersten Fuß Tiefe 1 gr., für den 2ten 3 Gr., für den 3ten 5 Gr. u. s. w. Der Brunnen wird fertig, und ist 397 Fuß tief, wie viel wird das Ausgraben kosten?

Um diese Aufgabe zu lösen, müßte man die Reihe

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ....

so weit fortsetzen, bis man 397 Glieder angesetzt hätte, und diese nun erst addiren.

Daß dieses eine beschwerliche, und vielen Irrungen unterworfene Rechnung seyn würde, ist wohl leicht einzusehen.

Und eben so könnten 3000 und mehrere Glieder vorkommen, und die Arbeit würde immer mühsamer werden.

§. 220.

(No. 32.)

Um nun sowohl spätere Glieder einer Reihe, als auch die Summe von vielen Gliedern leichter angeben zu können, ist es nöthig, Formeln zu entwickeln, durch welche der Zweck auf eine leichtere Art erreicht wird.

Die erste dieser Formeln, wodurch man jedes Glied der Reihe, ohne sie anzusetzen, finden kann, wird das *n*te oder allgemeine Glied genannt; es ist immer so beschaffen, daß man für *n* so viele Einheiten annimmt, als die Zahl des Glieds enthält, welches gesucht wird.

Die zweite solche Formel heißt die Summenformel, und hat die Eigenschaft, daß man die Summe von so vielen Gliedern erhält, als man n Einheiten gelten läßt.

Man hätte z. B. die Reihe

1, 3, 6, 10, 15, 21 . . . .

so ist das allgemeine Glied derselben

$$\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

wollte man nun das 1000ste Glied dieser Reihe finden, so ist

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} =$$

$$= 500 \cdot 1001 = 500500$$

Eben so ist die Summen Formel zu obiger Reihe

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

Will man nun durch diese Formel die Summe von 1000 Gliedern haben, so ist

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{2 \cdot 3} =$$

$$= 500 \cdot 1001 \cdot 334 = 167167000.$$

Ob es gleich nicht hierher gehört, auf welche Art diese Formeln entwickelt werden, und es genug ist, wenn der Anfänger einsieht, daß solche nicht allein Erleichterung verschaffen, sondern auch unentbehrlich sind, so will ich doch im nächsten §. zeigen, wie das allgemeine Glied gefunden wird, wenn die Summenformel bereits bekannt ist.

Da überdieß diese Operation bei allen Reihen, von welcher Gattung sie auch sind, gültig ist, so ist es wohl am passendsten, sie hier in der allgemeinen Einleitung zu diesem Abschnitte vorzutragen.

§. 221.
(No. 33.)

Man sieht leicht ein, daß, wenn die Summe von 50 Gliedern einer Reihe, und auch die Summe von 49 Gliedern bekannt ist, man das 50ste Glied finden kann, wenn man die Summa der 49 Glieder von der, der 50 Glieder abzieht, wo das 50ste Glied übrig bleiben muß.

Oder man hätte die Reihe

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 35.

Hier ist die Summa aller 9 Glieder = 127, und die Summa der ersten 8 Glieder = 92. Mithin 127 — 92 = 35 = dem letzten Gliede.

Es wird also nun nicht schwer werden einzusehen, daß man aus der Summenformel das *n*te Glied finden kann.

Denn man setze nun in der Summenformel $n - 1$ anstatt n, und ziehe diesen geänderten Ausdruck von dem ersten ab, so wird der Rest das *n*te oder allgemeine Glied seyn.

Ich werde dieses sogleich bei der jenseits angegebenen Formel darthun.

Jene Summenformel war

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

nun setze man $n - 1$ anstatt n, so ist

$$\frac{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)}{2 \,.\, 3} =$$

$$= \frac{(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + 3(n^2 - 2n + 1) + 2(n - 1)}{2 \,.\, 3} =$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 6n + 3 + 2n - 2}{2 \,.\, 3} =$$

$$= \frac{n^3 - n}{6}$$

Diesen geänderten Ausdruck, oder die Summe von $(n - 1)$ Gliedern, ziehe man von obiger Summen-

formel, nämlich von der Summe von n Gliedern, ab, so ist

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{6}-\frac{n^3-n}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n-n^3+n}{6}=$$

$$=\frac{3n^2+3n}{2\,.\,3}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Man hat also hier das schon früher angegebene $n$te Glied bloß durch die eben gezeigte Operation aus der Summenformel entwickelt.

Dieses Verfahren ist immer und bei allen Arten von Reihen thunlich.

Von den arithmetischen Reihen des ersten Ranges.

§. 222.

(No. 34.)

Arithmetische Reihen sind solche, bei welchen man immer dieselbe Differenz erhält, wenn man ein Glied von dem nachfolgenden abzieht. Z. B.

I. 1, 7, 13, 19, 25 . . . . Differenz 6

II. 200, 198, 196, 194, 192 . . . . Differenz — 2

III. $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$ . . . . Differenz $\frac{2}{8}$

Denn es ist hier $7-1=13-7=19-13=6$ u. s. w. eben so $198-200=196-198=194-196=-2$ u. s. w.

$\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}$ u. s. w.

Wegen dieser gleichen Differenzen heißen solche Reihen arithmetische Reihen des 1sten Ranges: hingegen sind die-

jenigen Reihen, wo erst die 2ten Differenzen gleich und beständig sind: **arithmetische Reihen des 2ten Ranges.** Z. B. ist

1, 3, 7, 13, 21 . . . eine solche Reihe
und 2, 4, 6, 8 . . . . sind ihre ersten Differenzen
und 2, 2, 2 . . . . die zweiten Differenzen.

Doch davon weiter unten.

Wenn man das erste Glied einer Reihe a, die Differenz d nennt, so kann man dadurch eine allgemeine Reihe des ersten Ranges von folgender Gestalt bilden.

A) $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d \ldots.$ welche für jede andere dieses Ranges gelten kann.

So war oben in I. $a = 1$, $d = 6$, in II. $a = 200$, $d = -2$, und in III. $a = \frac{1}{8}$, $d = \frac{2}{8}$.

§. 223.

(No. 35.)

Wenn wir überzeugt sind, daß die Reihe A. eine arithmetische Reihe von gleichen Differenzen ist, so wird es nicht schwer werden, ein allgemeines Glied und eine Summenformel für solche zu finden.

Bei genauerer Betrachtung der Reihe A. ergiebt sich Folgendes:

Jedes Glied dieser Reihe besteht aus dem ersten Gliede a, und so vielen Differenzen, als dem betreffenden Gliede Glieder vorhergehen; so hat das dritte Glied a, und $2d$; das 4te a, und $3d$, also ist auch das 7te Glied $= a + 6d$, das hundertste $a + 99d$. Eben so wird nun auch das $n$te Glied $(n - 1)$ Differenzen bei sich haben.

Benennen wir nun das allgemeine Glied immer mit t, so ist

$$t = a + (n-1)\,d = \underbrace{a + dn - d} \qquad \text{(I.}$$

welche Formel nun für alle Reihen dieses Ranges gilt, und deßhalb wohl zu behalten ist.

Um sie zu gebrauchen, ist immer a das erste Glied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, und t das letzte Glied.

Setzt man z. B. oben in der Reihe I. $a = 1$, $d = 6$, $n = 6$, so muß sich das 6te Glied $= 31$ ergeben: nämlich es ist

$$t = 1 + 6 . 6 - 6 = 1 + 36 - 6 = 31.$$

Eben so kann das 50ste, und noch spätere Glieder dieser Reihe gefunden werden: so ist

$$t = 1 + 6 . 50 - 6 = 1 + 294 = 295,$$
das 50ste Glied.

Durch Worte ausgedrückt, heißt die Formel: das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Reihe des ersten Ranges, ist gleich dem ersten Gliede, + so vielen Differenzen, als dem gesuchten Gliede Glieder vorhergehen.

§. 224.

(No. 36.)

Es wird sich nun auch leicht eine Summenformel für diese Reihe finden lassen.

Benennen wir die Summe einer solchen Reihe mit s, und suchen zuerst ihren Werth von einer bestimmten Anzahl, z. B. von 6 Gliedern: so ist

$$s = a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d + a + 5d$$

Schreiben wir nun diese Reihe von 6 Gliedern einmal gerade und einmal verkehrt unter einander, und addiren beide zusammen. Nämlich

$$\begin{array}{l} s = a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d + a + 5d \\ \text{und } s = a + 5d + a + 4d + a + 3d + a + 2d + a + d + a \end{array} \Big\} \text{ addirt.}$$

$$2s = 2a + 5d + 2a + 5d + 2a + 5d + 2a + 5d + 2a + 5d + 2a + 5d$$

$$2s = (2a + 5d)\ 6$$

$$s = (2a + 5d)\ \frac{6}{2}$$

Eben so würde man die Summe von 7 Gliedern

$s = (2a + 6d)\ \frac{7}{2}$, für 9 Glieder

$s = (2a + 8d)\ \frac{9}{2}$ u. s. w. finden.

Man sieht hieran deutlich, daß **jede Summe einer gewissen Anzahl Glieder aus der Summe des ersten und letzten Gliedes der Reihe, multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder, besteht.**

Also für unsere allgemeine Reihe

$$s = (a + t)\ \frac{n}{2} \qquad \text{(II.}$$

wo wieder a das erste, t das letzte Glied, und n die Anzahl der Glieder anzeigt.

Diese 2te Hauptformel ist ebenfalls wohl zu merken. Wollte man nun von obiger Reihe

1, 7, 13, 19, 25, 31;

die Summe dieser 6 Glieder, durch die Formel II finden, so ist

$s = (1 + 31)\ \frac{6}{2} = 32 \cdot 3 = 96$ eben so

wie $1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 = 96$ ist.

Eben so wäre die Summe von 50 Gliedern, weil oben das 50ste Glied $= 295$ gefunden wurde.

$$s = (1 + 295)\ \frac{50}{2} = \frac{296 \cdot 50}{2} =$$
$$= 148 \cdot 50 = 7400.$$

Anmerkung. Ich habe schon gesagt, daß die Formeln I u. II gut behalten werden müssen; außer diesem ist es aber auch

nöthig zu wissen, wie solche abgeleitet werden, um solche nöthigen Falls selbst entwickeln zu können, welches nicht schwer werden wird, wenn man die Reihe

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d \ldots\ldots$$

woraus sie entstanden sind, nicht aus dem Gedächtniß verliert, oder überhaupt nicht vergißt, wie das folgende Glied einer solchen Reihe aus dem vorhergehenden entstanden ist.

§. 225.

(No. 37.)

Die folgenden Aufgaben mögen den Gebrauch dieser Formeln näher erläutern.

Aufgabe 1. Die Reihe der natürlichen geraden Zahlen ist 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . .; es sind also alle Zahlen, die sich durch 2 dividiren lassen, Glieder dieser Reihe: das wie vielste Glied ist wohl 1538?

Hier ist $a = 2$, $d = 2$, $t = 1538$, n zu suchen: Es kann hier die Formel 1 gebraucht werden, wenn man vorher n daraus entwickelt.

Nämlich da $t = a + dn - d$,

so ist auch $\frac{t - a + d}{d} = n$

und hier $\frac{1538 - 2 + 2}{2} = \frac{1538}{2} = 769 = n.$

Mithin 1538 das 769ste Glied der obigen Reihe.

Aufgabe 2. Die Reihe der ungeraden natürlichen Zahlen ist

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9 \ldots\ldots$$

wie viel werden 115 Glieder dieser Reihe betragen?

Hier ist $a = 1$, $d = 2$, $n = 115$, s zu suchen.

Es würde hier die Formel II sogleich gebraucht werden können, wenn sie d enthielte und t nicht hätte; man muß also den Werth von t zuvor aus I entwickeln und in II substituiren.

Aus I ist $t = a + dn - d$ (A.

ferner ist $s = (a + t)\frac{n}{2}$

oder $2s = an + tn$

den Werth von t aus I $2s = an + n(a + dn - d)$

$$s = \frac{an + an + dn^2 - dn}{2}$$

$$s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$$

$$s = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$$

Und hier $s = 1 \,.\, 115 + \frac{2 \,.\, 115}{2}(115 - 1)$

$$s = 1 \,.\, 115 + 115 \,.\, 114 = 1 \,.\, 115 + 114 \,.\, 115$$

$$s = 115 \,.\, 115 = 13225.$$

Aufgabe 3. Man ließ eine Treppe von behauenen Steinen, 200 Stufen hoch, in einen Weinberg bauen: der Maurermeister machte den Accord, daß ihm für die erste Stufe für Stein und Legen 1 Pfennig, für jede folgende aber ein Gewisses mehr bezahlt würde. Nach dieser Zahlungsart erhielt der Maurermeister für die letzte Stufe 2 Thlr. 1 gr. 10 pf.; wie viel hat er für die 2te mehr als für die erste erhalten, und wieviel betrugen die Kosten für die ganze Treppe?

Hier ist $a = 1$, $t = 2$ Thlr. 1 gr. 10 pf. $= 49$ gr. 10 pf. $= 598$ pf., $n = 200$, d und s zu suchen.

Hier kann d sogleich aus I gefunden werden, wenn man es vorher daraus entwickelt, nämlich es ist

$$t = a + dn - d$$

$$t - a = d(n - 1)$$

$$\frac{t - a}{n - 1} = d$$

Also $d = \frac{598 - 1}{200 - 1} = \frac{597}{199} = 3$

Da ferner $a = 1$, $t = 598$ und $n = 200$ bekannt sind, so ist s durch II zu finden.

$$s = (a + t)\ \frac{n}{2}$$

$$s = (1 + 598)\ \frac{200}{2}$$

$s = 599 \cdot 100 = 59900$ pf. $= 207$ Thlr. 23 gr. 8 pf.

Der Maurermeister bekömmt also für den ersten Stein 1, für den 2ten 4, für den 3ten 7 pf. u. s. w., und erhält für die ganze Treppe 207 Thlr. 23 gr. 8 pf.

Aufgabe 4. Wäre aber die vorige Frage so gestellt: Ein Maurermeister bekömmt für eine Treppe in einem Weinberge, welche 200 Stufen hat, 207 Thlr. 23 gr. 8 pf., und zwar für die letzte Stufe 2 Thlr. 1 gr. 10 pf., und für jede vorhergehende ein Gewisses weniger: was wird er für die 1ste erhalten haben, und wie viel für die 2te mehr?

Hier ist $t = 598$ pf., $s = 59900$ pf., $n = 200$, a und d zu suchen.

Hier wird a aus II entwickelt und diese Formel sogleich angewendet.

Es ist nämlich

$$s = \frac{an + tn}{2}$$

$$2s = an + tn$$

$$\frac{2s - tn}{n} = a$$

Und hier $a = \frac{2 \cdot 59900 - 200 \cdot 598}{200} =$

$$= \frac{200 \cdot 599 - 200 \cdot 598}{200} = 599 - 598 = 1.$$

Aufgabe 5. 7700 Thlr. wurden unter eine Compagnie Soldaten, die sich bei dem Sturm einer Schanze

ausgezeichnet hatte, vertheilt; der zuerst die Brustwehr erstiegen hatte, bekam 275 Thlr., jeder folgende 5 Thlr. weniger: wie viel wird der letzte bekommen haben, und wie stark war die Compagnie?

Hier ist $s = 7700$, $t = 275$, $d = 5$ gegeben, a und n zu suchen.

Wir wollen hier a zuerst entwickeln. Hier ist weder I noch II sogleich zu brauchen, sondern es muß der Werth von n aus II weggeschafft, und der von d dafür hineingebracht werden; welches dadurch erreicht wird, wenn man n aus I entwickelt und in II substituirt.

Aus I ist $n = \frac{t - a + d}{d}$

In II $s = \frac{t - a + d}{d} \cdot \frac{a + t}{2}$

Man kann nun hier sogleich die Werthe in diese Gleichung setzen und a entwickeln: so ist

$$7700 = \frac{275 - a + 5}{5} \cdot \frac{a + 275}{2}$$

$$7700 \cdot 10 = (280 - a) \cdot (a + 275)$$

$$77000 = 280a - a^2 + 77000 - 275a$$

$$a^2 = 5a = 0$$

$$a^2 - 5a + \left[\frac{5}{2}\right]^2 = \frac{25}{4}$$

$$a - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

$$a = 5$$

Da jetzt auch a gefunden ist, so kann n sehr leicht, sowohl durch I, als II gefunden werden.

In I ist	In II ist
$n = \frac{t - a + d}{2}$	$s = \frac{n}{2}(a + t)$
$n = \frac{275 - 5 + 5}{5}$	$\frac{2s}{a + t} = n$
$n = \frac{275}{5}$	$\frac{2 \cdot 7700}{275 + 5} = n$
$n = 55$	$\frac{15400}{280} = n$
	$55 = n$

§. 226.

(No. 38.)

Die vorstehenden Aufgaben werden deutlich gezeigt haben, wie man sich der beiden Formeln I und II bedient, um die Aufgaben der arithmetischen Reihen des ersten Ranges zu lösen.

Kürzer kömmt man jedoch zum Zweck, wenn man sich die Formeln für alle mögliche Fälle, deren 20 sind, gleich im Voraus entwickelt, wie es im Folgenden geschehen wird, wo man sodann nur nöthig hat, die passende Formel zu wählen und die gegebenen Werthe zu substituiren.

Da hier 5 Größen, nämlich a, d, n, t und s, vorkommen, so müssen, da nur 2 Fundamentalgleichungen, I und II, vorhanden sind, auch immer 3 von den obigen Größen bekannt, und nur 2 unbekannt seyn. Wären 3 unbekannt, so würde, da sich nur 2 Gleichungen ansetzen lassen, auch die Aufgabe unbestimmt seyn.

Betrachten wir ferner, wenn a gesucht werden soll, und nur 3 Größen bekannt sind, so müßte einmal d, einmal n, einmal s und einmal t wegbleiben. Folglich wären für a vier Fälle möglich; eben so würden für d, n, s und t für jede Größe 4 Fälle, also im Ganzen 20 Fälle möglich seyn, wozu die im folgenden §. aufgestellten 20 Formeln gehören.

§. 227.

(No. 39.)

Aus den vorhergehenden 5 Aufgaben ist schon zu ersehen gewesen, daß die Formel II für die mehrsten Fälle brauchbar ist, wenn man den Werth der in dem gegebenen Falle nicht vorkommenden Größe aus I entwickelt und in II substituirt.

Es ist in I $t = a + dn - d$ A.

eben daraus $a = t - dn + d$ B.

und auch $n = \frac{t + d - a}{d}$ C.

Anmerkung. Die großen Buchstaben, womit hier die drei Gleichungen benannt sind, werden weiter unten bloß der Einleitung der Formeln zugefügt, um zu wissen, welche Formel von A., B. und C. gebraucht wird.

Der Werth von d kömmt in II nicht vor, wird also auch nicht substituirt.

I. Fall t zu suchen.

1) a, d, n gegeben; aus I.

$$t = a + dn - d$$

2) a, n, s gegeben; aus II.

$$s = (a + t)\frac{n}{2}$$

$$2s = (a + t)\, n$$

$$\frac{2s}{n} = a + t$$

$$\frac{2s}{n} - a = t$$

3) d, n, s gegeben; den Werth von a aus I in II substituirt. B.

$$s = [(t - dn + d) + t] \frac{n}{2}$$

$$2s = (t - dn + d + t)\, n$$

$$\frac{2s}{n} = 2t - dn + d$$

$$\frac{2s}{n} + dn - d = 2t$$

$$\frac{2s}{2n} + \frac{dn - d}{2} = t$$

$$\frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2} = t$$

4) a, d, s gegeben; den Werth von n aus I in II substituirt. C.

$$s = (a + t) \frac{n}{2}$$

$$2s = (a + t) \left[\frac{t + d - a}{d}\right]$$

$$2ds = at + ad - a^2 + t^2 + td - at$$

$$2ds = ad - a^2 + t^2 + td$$

$$t^2 + dt = 2ds + a^2 - ad$$

$$t^2 + dt + \left[\frac{d}{2}\right]^2 = 2ds + a^2 - ad + \frac{d2}{4}$$

$$t + \frac{d}{2} = \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{d^2}{4}}$$

$$t = -\frac{d}{2} + \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{d^2}{4}}$$

II. Fall s zu suchen.

5) a, n, t gegeben; nach No. II.

$$s = \frac{1}{2} n\,(a + t)$$

6) a, d, n gegeben; den Werth von t aus I in II substituirt. A.

$$ſ = [a + (a + dn - d)] \frac{n}{2}$$

$$ſ = (a + a + dn - d) \frac{n}{2}$$

$$ſ = \frac{an}{2} + \frac{an}{2} + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2}$$

$$ſ = an + \frac{dn}{2} (n - 1)$$

7) n, d, t gegeben; den Werth von a aus I in II substituirt. B.

$$ſ = [(t - dn + d) + t] \frac{n}{2}$$

$$ſ = \frac{2tn}{2} - \frac{dn^2}{2} + \frac{dn}{2}$$

$$ſ = tn - \frac{dn}{2} (n - 1)$$

8) a, d, t gegeben; den Werth von n aus I in II substituirt. C.

$$ſ = \frac{(a + t)}{2} \quad \frac{(t + d - a)}{d}$$

$$ſ = \frac{at + ad - a^2 + t^2 + dt - at}{2d}$$

$$ſ = \frac{t^2 - a^2}{2d} + \frac{ad + td}{2d}$$

$$ſ = \frac{(t + a) \; (t - a)}{2d} + \frac{a + t}{2}$$

III. Fall d zu suchen.

9) a, t, n gegeben; aus I.

$$d = \frac{t \quad a}{n \quad 1}$$

10) a, n, s gegeben; den Werth von t aus I in II substituirt. A.

$$s = (a + dn - d + a) \frac{n}{2}$$

$$2s = an + dn^2 - dn + an$$

$$2s - 2an = d\,(n^2 - n)$$

$$\frac{2s - 2an}{n^2 - n} = d$$

$$\frac{2s - 2an}{n(n - 1)} = d$$

11) a, t, s gegeben; den Werth von n aus I in II substituirt. C.

$$s = \frac{(a + t)}{2} \quad \frac{(t + d - a)}{d}$$

$$2sd = at + ad - a^2 + t^2 + td - at$$

$$2sd - ad - td = t^2 - a^2$$

$$d(2s - a - t) = (t + a)\ (t - a)$$

$$d = \frac{(t + a)\ (t - a)}{2s - a - t}$$

12) t, n, s gegeben; den Werth von a aus I in II substituirt. B.

$$s = (t - dn + d + t) \frac{n}{2}$$

$$2s = tn - dn^2 + dn + tn$$

$$dn^2 - dn = 2tn - 2s$$

$$d(n^2 - n) = 2\,(tn - s)$$

$$d = \frac{2\,(tn - s)}{n\,(n - 1)}$$

IV. Fall n zu suchen.

13) a, d, t gegeben; aus I. C.

$$n = \frac{t - a + d}{d}$$

$$n = 1 + \frac{t - a}{d}$$

14) a, t, s gegeben; aus II entwickelt.

$$s = (a + t)\,\frac{n}{2}$$

$$2s = (a + t)\,n$$

$$\frac{2s}{a + t} = n$$

15) a, d, s gegeben; den Werth von t aus I in II substituirt. A.

$$s = (a + a + dn - d)\,\frac{n}{2}$$

$$2s = an + an + dn^2 - dn$$

$$dn^2 - dn + 2an = 2s$$

$$n^2 + \frac{2a - d}{d}\,.\,n = \frac{2s}{d}$$

$$n^2 + \frac{2a - d}{d}\,.\,n + \left[\frac{2a - d}{2d}\right]^2 = \frac{2s}{d} + \left[\frac{2a - d}{2d}\right]^2$$

$$n^2 + \frac{2a - d}{d}\,.\,n + \left[\frac{2a - d}{2d}\right]^2 = \frac{2s}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}$$

$$n + \frac{2a - d}{2d} = \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}}$$

$$n = -\frac{a}{d} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}}$$

16) t, d, s gegeben; den Werth von a aus I in II substituirt. B.

$$(t - dn + d + t)\,\frac{n}{2} = s$$

$$tn - dn^2 + dn + tn = 2s$$

$$-dn^2 + 2tn + dn = 2s$$

$$dn^2 - (2t + d)\,n = -2s$$

$$n^2 - \frac{2t + d}{d}\,.\,a = -\frac{2s}{d}$$

$$n^2 - \frac{2t + d}{d}\,.\,n + \left[\frac{2t + d}{2d}\right]^2 = \left[\frac{2t + d}{2d}\right]^2 - \frac{2s}{d}$$

$$n - \left[\frac{2t + d}{2d}\right] = \sqrt{\frac{4t^2 + 4dt + d^2}{4d^2} - \frac{2s}{d}}$$

$$n = \frac{2t}{2d} + \frac{d}{2d} + \sqrt{\frac{t2}{d2} + \frac{t}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}}$$

V. Fall a zu suchen.

17) t, d, n gegeben; aus No. I. B.

$$\underbrace{a = t + d - dn}$$

18) t, n, s gegeben; aus No. II entwickelt.

$$(a + t)\frac{n}{2} = s$$

$$a + t = \frac{2s}{n}$$

$$\underbrace{a = \frac{2s}{n} - t}$$

19) t, d, s gegeben; den Werth von n aus I in II substituirt. C.

$$2s = (a + t)\left[\frac{t - a + d}{d}\right]$$

$$2sd = at - a^2 + ad + t^2 - at + dt$$

$$a^2 - ad = t^2 - dt - 2sd$$

$$a^2 - ad + \left[\frac{d}{2}\right]^2 = t^2 + dt - 2sd + \frac{d^2}{4}$$

$$a - \frac{d}{2} = \sqrt{t^2 + dt - 2sd + \frac{d^2}{4}}$$

$$\underbrace{a = \frac{d}{2} + \sqrt{t^2 + dt - 2sd + \frac{d^2}{4}}}$$

20) d, n, s gegeben; den Werth von t aus I in II substituirt. A.

$$2s = (a + a + dn - d)\,n$$

$$\frac{2s}{n} = 2a + dn - d$$

$$\frac{2s}{n} - dn + d = 2a$$

$$\frac{2s}{2n} - \frac{dn}{2} + \frac{d}{2} = a$$

$$\underbrace{\frac{s}{} - \frac{d}{2}(n - 1) = a}$$

§. 228.

(No. 40.)

Aufgaben über die arithmetischen Reihen des ersten Ranges, welche ohne Vorbereitung, entweder nach §. 225. No. 37 u. s. w., oder nach einer der vorhergehenden 20 Formeln gelös't werden.

Aufgabe 6. Ein verfallener Brunnen soll wieder aufgegraben werden; man weiß seine Tiefe nicht, doch ist aus den alten Rechnungen bekannt, daß er vor 100 Jahren 68 Thlr. 8 gr. zu graben gekostet hat, und zwar so, daß man für den ersten Fuß Tiefe 2 gr., für den zweiten 4 gr., den dritten 6 gr. u. s. w. bezahlt hat. Man soll daraus finden, wie tief man zu graben hat, bis man wieder die alte Tiefe erhält.

Hier ist $a = 2$, $s = 68$ Thlr. 8 gr. $= 1640$ gr., $d = 2$ gegeben, n zu suchen; folglich die Formel 15 anwendbar.

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}}$$

$$n = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2 \,.\, 1640}{2} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{2}}$$

$$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{1640 + \frac{1}{4}}$$

$$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6561}{4}}$$

$$n = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ Fuß.}$$

Aufgabe 7. Wenn nun dieser Brunnen 40 Fuß tief wird, und man jetzt für den ersten Fuß zu graben und auszumauern 1 Fl., für den zweiten 3 Fl., den dritten 5 Fl. u. s. w. zahlen muß, was wird die Wiederherstellung dieses Brunnens kosten?

Hier ist $a = 1$, $d = 2$, $n = 40$, s zu suchen; also nach Formel 6.

$$s = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$$

$$s = 1 \,.\, 40 + \frac{2 \,.\, 40}{2} \,.\, 39$$

$$s = 40 + 40 \,.\, 39$$

$$s = 40 + 1560 = 1600 \text{ Gulden.}$$

Aufgabe 8. Eine arithmetische Progression von 24 Gliedern ist so beschaffen, daß das letzte Glied 118, jedes vorhergehende aber 5 weniger beträgt; wie wird das erste Glied und die Summe aller Glieder seyn?

Hier ist $n = 24$, $d = 5$, $t = 118$, a und s zu suchen; also zuerst Formel 17 anzuwenden.

So ist nach 17; $a = t + d - dn$

$$a = 118 + 5 - 5 \,.\, 24$$

$$a = 123 - 120 = 3$$

Um nun s zu finden, hat man, da a, d, n, t gegeben ist, die Formeln 5, 6, 7 und 8, welche alle diese Aufgaben vollends lösen.

Nach 5 ist $s = (a + t) \frac{n}{2}$

$$s = (3 + 118)\ 12$$

$$s = 121 \,.\, 12$$

$$s = 1452$$

nach 6 ist $s = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$

$$s = 3 \,.\, 24 + \frac{5 \,.\, 24}{2} \,.\, 23$$

$$s = 72 + 60 \,.\, 23$$

$$s = 72 + 1380$$

$$s = 1452$$

nach 8 ist $s = \frac{(t+a)\,(t-a)}{2d} + \frac{a+t}{2}$

$s = \frac{(118+3)\,(118-3)}{2\,.\,5} + \frac{118+3}{2}$

$s = \frac{121\,.\,115}{2\,.\,5} + \frac{121}{2}$

$s = \frac{121\,.\,23}{2} + \frac{121}{2}$

$s = \frac{121\,.\,24}{2} = 121\,.\,12 = 1452$

nach 7 ist $s = tn - \frac{dn}{2}\,(n-1)$

$s = 118\,.\,24 - \frac{5\,.\,24}{2}\,(23)$

$s = 118\,.\,24 - 5\,.\,12\,.\,23$

$s = 2832 - 1380 = 1452$

Aufgabe 9. Ein Gärtner wurde gefragt, wie lang sein Garten sey; er antwortete: wenn ich für den ersten Schritt 6 pf., für den zweiten 12 pf., für den dritten 18 pf. u. s. w. bezahle, so kostet mich ein Gang durch den Garten 2 Thlr. 20 gr. Wie lang war der Garten?

Hier ist $a = 6$, $d = 6$, $s = 2$ Thlr. 20 gr. = 816 pf. n zu suchen; also nach No. 15.

so ist $n = \frac{1}{2} - 1 + \sqrt{\frac{1632}{6} + 1 + \frac{1}{4} - 1}$

$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{272 + \frac{1}{4}}$

$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1089}{4}}$

$n = -\frac{1}{2} + \frac{33}{2} = \frac{32}{2} = 16$ Schritt

Aufgabe 10. Der Besitzer einer Pflanzung kaufte einen Sclaven, und sagte ihm: wenn du dich gut beträgst, bekommst du das erste Jahr 5 Thaler, und alle

Jahr etwas mehr, und sobald du 100 Thlr. oder darüber in einem Jahre bekömmst, bist du frei. Nach einer ziemlichen Reihe von Jahren bekam der Sclave 101 Thlr., und hatte nun im Ganzen von seinem Herrn 1325 Thlr. erhalten. Wie viel hat er das 2te Mal mehr erhalten, als das 1ste, und wie lange hat er um seine Freiheit gedient?

Hier ist $2 = 5$, $t = 101$, $s = 1325$.

Also d und n zu suchen, und hier die Formel 11 zuerst anzuwenden.

$$d = \frac{(101 + 5)\ (101 - 5)}{2 \cdot 1325 - 101 - 5}$$

$$d = \frac{106 \cdot 96}{2650 - 106}$$

$$d = \frac{10176}{2544} = 4 \text{ Thaler.}$$

Da nun a, d, t und s gegeben, so können alle 4 Formeln des IV. Falles angewendet werden: daß man hier am schnellsten zum Zwecke kömmt, wenn man No. 13. nimmt, ist leicht ersichtlich.

Hier ist

$$n = 1 + \frac{101 - 5}{4}$$

$$n = 1 + \frac{96}{4} = 1 + 24$$

$$n = 25$$

Aufgabe 11. Man kauft ein Pferd, und verspricht für den ersten Hufnagel 8 gr., für den zweiten 12 gr., den dritten 16 gr. u. s. w. zu geben: da nun ein Pferd gewöhnlich 32 Hufnägel hat, so fragt es sich, was das Pferd kosten wird?

Hier ist $a = 8$, $d = 4$, $n = 32$, und s nach No. 6. zu suchen.

$$s = 8 \cdot 32 + \frac{4 \cdot 32}{2} (32 - 1)$$

$$s = 256 + 4 \cdot 16 \cdot 31$$

$$s = 256 + 64 \cdot 31$$

$$s = 256 + 1984 = 2240 \text{ gr.}$$

2240 gr. = 93 Thlr. 8 gr. Preis des Pferdes.

Aufgabe 11. Man zertheile 14 in 7 Theile, daß jeder Theil $\frac{1}{3}$ größer ist, als der vorhergehende.

$d = \frac{1}{3}$, $s = 14$, $n = 7$, a zu suchen.

So ist nach No. 20.

$$a = \frac{14}{7} - \frac{\frac{1}{3}}{2} (7 - 1)$$

$$a = 2 - \frac{1}{6} \cdot 6 = 2 - 1 = 1.$$

Folglich die gesuchte Reihe

$$1 + 1\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{2}{3} + 2 + 2\tfrac{1}{3} + 2\tfrac{2}{3} + 3 = 14.$$

Aufgabe 12. Wenn 3500 Thlr. zu 4 Procent angelegt werden, und das Capital jedes Jahr um 300 Thlr. vermehrt wird: wie viel betragen die ganzen Zinsen von 24 Jahren (ohne Zinseszinsen zu rechnen)?

$$100 : 4 = 3500 : a$$

$$a = \frac{3500 \cdot 4}{100} = 4 \cdot 35 = 140$$

$$100 : 4 = 300 : d$$

$$d = \frac{4 \cdot 300}{100} = 12$$

$$n = 24$$

So ist nach No. 6.

$$s = 140 \cdot 24 + \frac{12 \cdot 24}{2} (24 - 1)$$

$$s = 3360 + 144 \cdot 23 = 3360 + 3312$$

$$s = 6672 \text{ Thlr.}$$

Aufgabe 13. Ein Reisender, der in 19 Tagen an seinem Bestimmungsorte zu seyn wünscht, beschleunigt seine Reise so, daß er jeden Tag $\frac{1}{4}$ Meile mehr macht, als am vorhergehenden. Da er nun den letzten Tag $14\frac{1}{2}$ Meile zurückgelegt hat; so fragt sich's, wie viele Meilen machte er den ersten Tag? und wie viele Meilen beträgt die ganze Reise?

$d = \frac{1}{4}$, $n = 19$, $t = 14\frac{1}{2}$, so ist nach No. 17.

$$a = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 19 = 14\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4} = \underbrace{10}$$

und nach No. 5.

$$s = \frac{1}{2} \cdot 19\,(10 + 14\tfrac{1}{2}) + \frac{19}{2} \cdot \frac{49}{2} = \frac{931}{4}$$
$$= \underbrace{232\tfrac{3}{4}}.$$

Aufgabe 14. Ein Schuldner wird mit seinen Gläubigern einig, seine Schuld von 12950 Thlr., welche auf einmal zu bezahlen er sich außer Stande sieht, in monatlichen Terminen abzutragen, und zwar im ersten Monate 600 Thlr., jeden folgenden Monat aber immer 50 Thlr. mehr. In wie viel Monaten wird die ganze Schuld abgetragen seyn? Und wie viel hat er den letzten Monat zu entrichten?

Hier ist $a = 600$, $d = 50$, $s = 12950$ und nach No. 15.

$$n = \frac{1}{2} - \frac{600}{50} + \sqrt{\frac{2 \cdot 12950}{50} + \left[\frac{600}{50}\right]^2 + \frac{1}{4} - \frac{600}{50}}$$

$$n = \frac{1}{2} - 12 + \sqrt{2 \cdot 259 + 144 + \frac{1}{4} - 12}$$

$$n = \frac{1}{2} - 12 + \sqrt{518 + 132\tfrac{1}{4}}$$

$$n = \frac{1}{2} - 12 + \sqrt{\frac{2601}{4}}$$

$$n = \frac{1}{2} - 12 + \frac{51}{2} = \frac{52}{2} - 12 = 26 - 12 = \underbrace{14}$$

Monate würde die Abzahlung dauern.

Nun ist nach No. I. oder No. 1.

$$t = 600 + 14 \cdot 50 - 50$$

$$t = 600 + 13 \cdot 50 = 600 + 650 = 1250$$

Thaler wird er den letzten Monat abtragen.

Aufgabe 15. Es ist bekannt, daß jeder Körper, der im luftleeren Raume fällt, in der ersten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß durchläuft, in jeder folgenden aber immer $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr als in der vorhergehenden. Wenn nun ein Körper 20 Secunden gefallen ist, wie viel Fuß wird er in der letzten Secunde zurückgelegt haben? und wie viel in der ganzen Zeit?

Hier ist $a = 15\frac{5}{8}$, $d = 31\frac{1}{4}$, $n = 20$.

So ist nach No. I. oder No. 1.

$$t = 15\tfrac{5}{8} + 20 \cdot 31\tfrac{1}{4} - 31\tfrac{1}{4}$$

$$t = 15\tfrac{5}{8} + 19 \cdot 31\tfrac{1}{4}$$

$$t = 15\tfrac{5}{8} + \frac{2375}{4} = 15\tfrac{5}{8} + 593\tfrac{3}{4} = 609\tfrac{3}{8} \text{ Fuß};$$

und nach No. 5.

$$s = \frac{1}{2} \cdot 20\,(609\tfrac{3}{8} + 15\tfrac{5}{8}) = 10 \cdot 625 = 6250 \text{ Fuß}.$$

Aufgabe 16. Ein Witterungsbeobachter lies't, daß vom 8ten bis 19ten Junius das Thermometer täglich um einen halben Grad gestiegen sey, und daß das arithmetische Mittel dieser 12 Beobachtungen $18\frac{3}{4}$ Grad war. Auf welchem Grad stand es am 8ten?

Hier ist $n = 12$, $d = 1$, $\frac{s}{12} = 18\frac{3}{4} = \frac{75}{4}$,

mithin $s = \frac{75 \cdot 12}{4} = 75 \cdot 3 = 225$. a zu suchen.

So ist nach No. 20.

$$a = \frac{225}{12} - \frac{1}{4} \cdot 11 = \frac{225}{12} - \frac{33}{12} =$$

$$= \frac{192}{12} = 16.$$

§. 229.

(No. 41.)

Aufgaben über die arithmetischen Reihen des 1sten Ranges, welche ohne algebraische Vorbereitung nicht aufgelös't werden können.

Aufgabe 17. Man hat 18 Zahlen, die in arithmethischer Progression stehen. Wenn man die beiden mittleren addirt, so kömmt $31\frac{1}{2}$; werden aber die erste und letzte mit einander multiplicirt, so erhält man $85\frac{1}{2}$. Wie groß ist die erste Zahl und die Differenz dieser Progression?

Es sey das erste Glied x, das 2te $x + y$, das 3te $x + 2y$ ...., so ist das 9te Glied $x + 8y$ und das 10te $x + 9y$, also $2x + 17y = 31\frac{1}{2}$ (A.

Ferner ist das letzte Glied $x + 17y$, also auch $x(x + 17y) = x^2 + 17xy = 85\frac{1}{2}$ (B.

Aus A. folgt

$$x = \frac{\frac{63}{2} - 17y}{2}$$

$$x = \frac{\frac{63 - 34y}{2}}{2}$$

$$x = \frac{63 - 34y}{4} \quad \text{(C.}$$

Aus B. folgt

$$x^2 + 17xy = \frac{171}{2}$$

$$x^2 + 17xy + \left[\frac{17y}{2}\right]^2 = \frac{171}{2} + \frac{289y^2}{4}$$

$$x + \frac{17y}{2} = \sqrt{\frac{342 + 289y^2}{4}}$$

$$x = -\frac{17y}{2} + \sqrt{\frac{342 + 289y^2}{4}} \quad \text{(D.}$$

Aus C. und D. folgt

$$-\frac{17y}{2} + \sqrt{\frac{342 + 289y^2}{4}} = \frac{63 - 34y}{4}$$

$$\sqrt{\frac{342 + 289y^2}{4}} = \frac{63 - 34y}{4} + \frac{17y}{2}$$

$$\sqrt{\frac{342 + 289y^2}{4}} = \frac{63}{4}$$

$$\frac{342 + 289y^2}{4} = \left[\frac{63}{4}\right]^2$$

$$\frac{342 + 289y^2}{4} = \frac{3969}{16}$$

$$342 + 289y^2 = \frac{3969}{4}$$

$$289y^2 = \frac{3969}{4} - 342$$

$$289y^2 = \frac{3969 - 1368}{4}$$

$$289y^2 = \frac{2601}{4}$$

$$y^2 = \frac{2601}{4 \,.\, 289}$$

$$y = \sqrt{\frac{1601}{4 \,.\, 289}} = \frac{51}{2 \,.\, 17} = \frac{51}{34} = 1\tfrac{1}{2}$$

Diesen Werth von y in die Gleichung A. substituirt, giebt

$$x = \frac{63 - 34 \,.\, \frac{3}{2}}{4} = \frac{63 - \frac{102}{2}}{4} =$$

$$= \frac{126 - 102}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Also die Progression

3, $4\frac{1}{2}$, 6, $7\frac{1}{2}$, 9, $10\frac{1}{2}$, 12, $13\frac{1}{2}$, 15
$16\frac{1}{2}$, 18, $19\frac{1}{2}$, 21, $22\frac{1}{2}$, 24, $25\frac{1}{2}$, 27, $28\frac{1}{2}$.

Nun ist

$$28\tfrac{1}{2} \,.\, 3 = 84\tfrac{3}{2} = 85\tfrac{1}{2}$$

und $16\frac{1}{2} + 15 = 31\frac{1}{2}$.

Aufgabe 18. Zwei Personen reisen einer Zusammenkunft halben zu gleicher Zeit und auf derselben Tour von zweien Orten A und B ab, welche 170 Meilen von einander entfernt liegen. Der von B abgegangene macht täglich regelmäßig 4 Meilen; der andere aber den ersten Tag nur 2 Meilen, jeden folgenden aber immer $\frac{1}{2}$ Meile mehr als am vorhergehenden. Wann werden sie zusammenkommen?

Sie treffen einander am $x$ten Tage.

Am $x$ten Tage hat der von B abgegangene $4x$ Meilen gemacht.

Der von A macht den ersten Tag 2, den 2ten $2\frac{1}{2}$, den dritten 3 Meilen u. s. w., so ist hier $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $n = x$, f zu suchen, so ist nach Formel No. 6

$$f = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$$

hier $$f = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}(x - 1)$$

$$f = 2x + \frac{x}{4}(x - 1)$$

$$f = \frac{8x + x^2 - x}{4} = \frac{7x + x^2}{4}$$ = dem

was der 2te zusammen gemacht hat: also nun

$$\frac{7x + x^2}{4} + 4x = 170$$

$$7x + x^2 + 16x = 680$$

$$x^2 + 23x = 680$$

$$x^2 + 23x + \left[\frac{23}{2}\right]^2 = 680 + \left[\frac{23}{2}\right]^2$$

$$x + \frac{23}{2} = \sqrt{\frac{529}{4} + 680}$$

$$x = -\frac{23}{2} + \sqrt{\frac{3249}{4}}$$

$$x = -\frac{23}{2} + \frac{57}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Also am 17ten Tage werden sie einander treffen: so hat, der aus B ausgieng, $4 \cdot 17 = 68$ Meilen gemacht, und der aus A muß 102 Meilen gemacht haben.

Es muß also $\frac{7x + x^2}{4} = 102$ seyn

$$7x + x^2 = 408$$

$$7 \cdot 17 + 17 \cdot 17 = 408$$

$$24 \cdot 17 = 408$$

und $408 = 408$

Aufgabe 19. Man hatte eine Straße am Abhange eines Gebirgs erbaut, welche der ganzen Länge nach eine Brustlehne von behauenen Steinen erhalten sollte. Die ganze Länge der Straße betrug 12 Stunden, und das Herbeischaffen der Steine war folgendermaaßen mit Bauern accordirt. Jeder sollte $\frac{1}{2}$ Stunde Straßen-Strecke mit den nöthigen Steinen, die am Fuße des Berges gebrochen und behauen wurden, versehen; wofür der erste etwas Gewisses, der 2te ein gewisses Geld mehr, und eben so viel der dritte mehr als der zweite u. s. w., erhalten sollte. Als das Fuhrlohn vertheilt wurde, waren einige Fuhrleute nicht gegenwärtig, und man hatte ihr Geld andern mitgegeben. Die abwesenden erhoben nun Streitigkeiten mit denjenigen, welche ihr Geld mitgenommen hatten. In den Rechnungen war der Betrag im Ganzen eingetragen, und man fand bloß, daß der 24ste oder letzte für sich und den 22sten 222 Thlr. erhalten, und eben so der 16te für sich und den 4ten 92 Thlr. erhalten hatte.

Es fragt sich nun:

1) Was gehört Jedem der 4 Streitenden?
2) Was hat der erste erhalten?
3) Wie viel hat der 2te mehr bekommen?
4) Was hat der ganze Bau der Brustlehne gekostet?

Der erste hat erhalten x Thlr, der 2te $(x + y)$ Thlr.
so hat der 4te $x + 3y$, der 16te $x + 15y$
der 22ste $x + 21y$, der letzte $x + 23y$.

Also

$$x + 3y + x + 15y = 92; \quad x + 21y + x + 23y = 222$$

$$2x = 92 - 18y \qquad 2x = 222 - 44y$$

$$x = 46 - 9y \qquad x = 111 - 22y$$

$$46 - 9y = 111 - 22y$$

$$13y = 65$$

$$y = 5 = \text{Differenz} = d.$$

$$x = 46 - 9y = 46 - 45 = 1 = \text{1stem Glied} = a.$$

Also der 1ste 1 Thlr., der 2te 6 Thlr., der 3te 11 Thlr. u. s. w.

Endlich der 4te, $x + 3y = 1 + 3 \cdot 5 = 16$
. . . 16, $x + 15y = 1 + 15 \cdot 5 = 76$

Der 4te und 16te $= 92$

Eben so
der 22ste, $x + 21y = 1 + 105 = 106$
. . . 24ste, $x + 23y = 1 + 115 = 116$

Der 22ste und 24ste $= 222$

Nun ist

$$s = (a + t)\,\frac{n}{2}$$

$$s = (1 + 116)\,\frac{24}{2}$$

$$s = 117 \cdot 12 = 1404$$

Aufgabe 20. Ein Diamant wird von einem Juwelier verschrieben, und so accordirt, daß der erste Karath 15; der 2te 21, der dritte 27 Thlr. u. s. w. kosten solle: der Diamant wog aber $4\frac{1}{2}$ Karath, wie viel wird bezahlt werden?

Da hier die Preise der ganzen Karathe in einer arithmetischen Progression steigen, so müssen auch die Preise der halben eben so steigen.

Es ist also

Preis des 1sten halben Karaths x Thlr.
— — 2ten — — $x + y$
— — 3ten — — $x + 2y$
— — 4ten — — $x + 3y$.

Also

$$x + x + y = 15, \qquad x + 2y + x + 3y = 21$$
$$2x = 15 - y \qquad 2x + 5y = 21$$
$$x = \frac{15 - y}{2} \qquad 2x = 21 - 5y$$
$$x = \frac{21 - 5y}{2}$$

$$15 - y = 21 - 5y$$
$$4y = 6$$
$$y = \frac{3}{2} = \text{Differenz} = d$$

$$x = \frac{15 - \frac{3}{2}}{2} = \left[\frac{30 - 3}{2}\right] : 2 = \frac{27}{4} = 6\tfrac{3}{4}$$

So ist nun $a = 6\frac{3}{4}$, $d = \frac{3}{2}$, $n = 9$.

Also nach Formel No. 6

$$s = 6\tfrac{3}{4} \,.\, 9 + \frac{\frac{3}{2} \,.\, 9}{2}(9 - 1)$$
$$s = 54\tfrac{27}{4} + \frac{27}{4} \,.\, 8$$
$$s = 60\tfrac{3}{4} + 54 = 114\tfrac{3}{4}$$ Thlr. Preis des ganzen Diamants.

Die Reihe wäre also

$6\frac{3}{4} + 8\frac{1}{4} + 9\frac{3}{4} + 11\frac{1}{4} + 12\frac{3}{4} + 14\frac{1}{4} + 15\frac{3}{4} + 17\frac{1}{4} + 18\frac{3}{4} = 114\frac{3}{4}$ wie oben.

So ist auch

$6\frac{3}{4} + 8\frac{1}{4} = 15$ der 1ste und 2te halbe.
und $9\frac{3}{4} + 11\frac{1}{4} = 21$ der 3te und 4te halbe.
$12\frac{3}{4} + 14\frac{1}{4} = 27$ der 5te und 6te halbe.
$15\frac{3}{4} + 17\frac{1}{4} = 33$ der 7te und 8te halbe.

Da nun 15, 21, 27, 33 die gegebene Progression, so ist auch diese Aufgabe richtig.

Anmerkung. Bei solchen Aufgaben kann man jedoch auch die Anzahl der Glieder als Bruch annehmen, und man wird hier auch zum Zweck gelangen, wenn man $n = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ annimmt. So ist in diesem Falle $a = 15$, $d = 6$, und

$$f = \frac{\frac{15 \cdot 9}{2} + \frac{6 \cdot \frac{9}{2}}{2}\left[\frac{9}{2} - 1\right]}{}$$

$$= \frac{135}{2} + \frac{54}{4} \cdot \frac{7}{2} = 67\frac{1}{2} + \frac{378}{8} = 67\frac{1}{2} + 47\frac{1}{4}$$

$= 114\frac{3}{4}$ wie vorher.

§. 230.

(No. 42.)

Aufgaben, deren Auflösung ich den Anfängern selbst überlasse.

Aufgabe 21. Ein Herr miethet einen Bedienten, und verspricht ihm an Lohn im ersten Jahre 30 Thlr., für jedes folgende $4\frac{1}{2}$ Thaler mehr, als für das vorhergehende. Wie viel wird der Bediente im 17ten Jahre erhalten, und wie viel für alle 17 Jahre überhaupt erhalten haben?

$t = 102$ Thlr. im 17ten Jahre.
$f = 1122$ Thlr. in 17 Jahren.

Aufgabe 22. Es ist ein Brunnen 30 Fuß tief gegraben worden; man zahlt für den ersten Fuß 17 gr., für jeden folgenden 2 Pfennige mehr, als für den vor-

hergehenden. Wie viel zahlt man für den letzten Fuß? und wie viel für den ganzen Brunnen?

t = 4 Thlr. $19\frac{1}{2}$ gr. für den letzten Fuß.

$\int$ = 54 Thlr. 12 gr. für den ganzen Brunnen.

Aufgabe 23. Wie groß ist die Differenz einer arithmetischen Progression von 22 Gliedern, deren erstes Glied 1, und letztes Glied 15 ist?

$d = \frac{2}{3}$ Differenz der Reihe.

Aufgabe 24. Wenn ein Körper in der 1sten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß, und in jeder folgenden $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr fällt; wie lange muß er fallen, wenn er einen Raum von 4000 Fuß durchlaufen soll?

n = 16 Secunden.

Aufgabe 25. Jemand genießt eine Rente von 500 Thlr.; er giebt davon nichts aus, sondern legt immer sogleich bei'm Empfang das Geld zu 5 Procent an, und läßt auch die Zinsen unberührt. Nach wie viel Jahren wird er sich 6875 Thlr. gesammelt haben?

n = 11 Jahre.

Aufgabe 26. Man hat eine Progression, von welcher weder das erste Glied, noch die Differenz, noch irgend ein anderes Glied bekannt ist; man weiß jedoch, daß das 5te und 7te Glied zusammen 200, und das 10te und 12te zusammen 160 ausmachen. Wie groß wird jedes dieser Glieder seyn? und wie die ganze Reihe aussehen, wenn das 12te Glied das letzte ist?

5tes Glied = 104
6tes Glied = 96 } 104 + 96 = 200

10tes Glied = 84
12tes Glied = 76 } 84 + 76 = 160

1stes Glied a = 120

Differenz d = − 4

Reihe

120, 116, 112, 108, 104, 100, 96, 92, 88, 84, 80, 76.

Aufgabe 27. Man läßt einen Brunnen graben, mit dem Accord, für die erste Ruthe Tiefe 5 Thlr., für die zweite 11 Thlr., für die dritte 17 Thlr. u. s. w. zu bezahlen: man findet aber schon bei $2\frac{1}{2}$ Ruthe Tiefe hinlängliches Wasser, was wird bezahlt werden?

$s = 23\frac{3}{4}$ Rthlr.

$a = \frac{7}{4}$, $d = \frac{6}{4}$, $t = \frac{31}{4}$, $n = 5$ oder

$a = 5$, $d = 6$, $n = 2\frac{1}{2}$: nach Aufgabe 20.

Von den arithmetischen Reihen des zweiten, dritten u. s. w. Ranges.

---

§. 231.
(No. 43.)

Im 222. §. (No. 34.) ist bereits erklärt worden, was eine arithmetische Reihe des 2ten Ranges ist; nämlich eine solche, deren zweite Differenzen beständig sind. Eben so ist eine solche Reihe, wo erst die 3ten Differenzen beständig sind, eine arithmetische Reihe des dritten Ranges u. s. w. Z. B. ist

I. 1, 3, 7, 13, 21 .... eine arithmetische Reihe des 2ten Ranges.

und 2, 4, 6, 8 .... ihre ersten Differenzen, eine arithm. Reihe des 1sten Ranges.

und 2, 2, 2 .... ihre beständigen, oder 2ten Differenzen.

Eben so ist

II. 1, 2, 4, 8, 15 .... eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges.

und 1, 2, 4, 7 .... ihre ersten Differenzen, eine arithm. Reihe des 2ten Ranges.

und 1, 2, 3 .... ihre zweiten Differenzen, eine arithm. Reihe des 1sten Ranges.
endlich 1, 1 .... ihre beständigen, oder 3ten Differenzen.
So giebt es nun auch Reihen des 4ten, 5ten u. s. w. Ranges, wo nämlich erst die 4te, 5te u. s. w. Differenzen einander gleich sind.

Aus der Reihe I ergiebt sich, daß 3 Glieder gegeben seyn müssen, um ihre bleibende Differenz, das heißt, die Natur der Reihe zu erkennen oder fortzusetzen: eben so sind zur Fortsetzung der Reihe II 4 Glieder nöthig. Hieran findet man deutlich, daß es erst durch Hinzufügen des 4ten Glieds zu erkennen ist, daß die Reihe zum 3ten Range gehörte, weil die drei ersten Glieder völlig dieselben sind, wie in der Reihe ihrer ersten Differenzen.

§. 232.
(No. 44.)

Benennen wir nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges mit E, und die Reihe der ersten Differenzen, wie früher die arithmetische Reihe des ersten Ranges, mit

$$a,\quad a + d,\quad a + 2d,\quad a + 3d,\quad a + 4d \ldots$$

so mag zur Versinnlichung der Entstehung der Reihe des 2ten Ranges die folgende dienen.

2te Differenzen	2,	2,	2,	2		
1ste Differenzen	1,	3,	5,	7,	9	
Reihe des 2ten Ranges	1,	2,	5,	10,	17,	26 ....

Hier ergiebt sich, wie aus den 2ten Differenzen, und dem 1sten Gliede der 1sten Differenzen die letzteren entstehen; nämlich

$$3 = 1 + 2,\; 5 = 3 + 2,\; 7 = 5 + 2,\; 9 = 7 + 2$$

durch eine gleichförmige Addition entsteht nun auch die Reihe des 2ten Ranges; nämlich

$1 + 1 = 2$, $2 + 3 = 5$, $5 + 5 = 10$, $10 + 7 = 17$, $17 + 9 = 26$.

Auf eine ähnliche Art wollen wir nun auch die für die Folge nöthige allgemeine Reihe zusammensetzen.

2te Differenzen d, d, d, d ...

1ste Differenzen a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$...

III. Reihe des 2ten Ranges E, $E + a$, $E + 2a + d$, $E + 3a + 3d$, $E + 4a + 6d$, $E + 5a + 10d$.

Die obige Reihe mit dieser verglichen, so ist

$E = 1$, $a = 1$, $d = 2$, und nun

1stes Glied $1 = E = 1$;

2tes Glied $2 = E + a = 1 + 1 = 2$;

3tes Glied $5 = E + 2a + d = 1 + 2 + 2 = 5$;

4tes Glied $10 = E + 3a + 3d = 1 + 3 + 6 = 10$;

5tes Glied $17 = E + 4a + 6d = 1 + 4 + 12 = 17$ u. s. w.

Setzt man nun die Glieder der Reihe III einzeln an, so wie sie entstanden sind, so bekommen sie folgende Gestalt:

1) $E = E$;

2) $E + a = E + a$;

3) $E + 2a + d = E + a + (a + d)$;

4) $E + 3a + 3d = E + a + (a + d) + (a + 2d)$;

5) $E + 4a + 6d = E + a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d)$;

6) $E + 5a + 10d = E + a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)$ u. s. w.

Bei genauer Betrachtung dieser Glieder ergiebt sich, daß jedes Glied auf folgende Art schließt; nämlich das 3te mit $a + 1d$, das 4te mit $a + 2d$, das 5te mit $a + 3d$, das 6te mit $a + 4d$; es wird also auch das $n$te mit $a + (n - 2)\,d$ schließen, mithin das

$n$te Glied $= E + a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots [a + (n - 2)\,d]$

Ferner findet man aus obigen Gliedern, daß in jedem Gliede das Anfangs-Glied E so viele Glieder der Differenz-Reihe bei sich hat, als dem betreffenden Gliede Glieder vorhergehen.

So besteht also das $n$te Glied

1) aus dem Anfangsgliede E;
2) aus $(n - 1)$ Gliedern der Reihe a, $a + d$, $a + 2d \ldots$

Es kömmt also hier bloß darauf an, die Summe von $(n - 1)$ Gliedern der letztern Reihe zu finden und solche zu E zuzusetzen.

Aus §. 221. ist es bekannt, daß man die Summe von $(n - 1)$ Gliedern findet, wenn man das letzte Glied von der Summe, d. i. das $n$te Glied von der Summe von n Gliedern abzieht. Nun ist

Summe von n Gliedern $\int = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$ (A.

oder $\int = \frac{2an}{2} + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2}$
das allgemeine Glied $t = a + dn - d$ abgezogen.
$- \quad - \quad - \quad +$

$$\int - t = \frac{2an}{2} - a + \frac{dn^2}{2} - dn - \frac{dn}{2} + d$$

$$\int - t = \frac{2an - 2a + dn^2 - 2dn - dn + 2d}{2}$$

$$\int - t = \frac{2an - 2a + dn^2 - 2dn + d - dn + d}{2}$$

$$\int - t = \frac{2a(n - 1) + d(n^2 - 2n + 1) - d(n - 1)}{2}$$

$$\int - t = \frac{2a(n - 1) + d(n - 1)^2 - d(n - 1)}{2}$$

Dieser letzte Ausdruck ist nun die Summen-Formel von $(n - 1)$ Gliedern der Reihe a, $a + d$, $a + 2d \ldots$

Dasselbe erhält man, wenn man oben in die Formel A. $(n-1)$ statt n setzt und $ſ = ſ - t$ annimmt: so ist

$$ſ - t = \frac{2a(n-1)}{2} + \frac{d(n-1)^2}{2} - \frac{d(n-1)}{2}$$

Fügt man nun diesem Ausdrucke das erste Glied E der arithmethischen Reihe des 2ten Ranges zu, und benennt das $n$te Glied einer solchen Reihe mit T, so ist

$$T = E + \frac{2a(n-1) + d(n-1)^2 - d(n-1)}{2}$$

Mit dieser Formel können nun, um sie abzukürzen, noch folgende Veränderungen vorgenommen werden.

$$T = E + an - a + \frac{dn^2}{2} - dn - \frac{dn}{2} + d$$

$$T = E + an - \frac{3dn}{2} + \frac{dn^2}{2} + d - a$$

$$T = \tfrac{1}{2}dn^2 + (a - \tfrac{3}{2}d)\,n + (E + d - a).$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}d = P$, $(a - \frac{3}{2}d) = Q$ $(E + d - a) = R$, so ist

B) $$\underbrace{T = Pn^2 + Qn + R}$$

Aus dem vorigen §. ist bereits bekannt, daß zu Fortsetzung einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges 3 Glieder gegeben seyn müssen; da man also diese 3 Glieder zu jeder Reihe erhält, so lassen sich durch Hülfe derselben die unbekannten Coëfficienten P, Q und R finden. Man setze nämlich einmal $T =$ dem 1sten, einmal $=$ dem 2ten und einmal $=$ dem 3ten Gliede; außerdem in der ersten Gleichung $n = 1$, in der 2ten $n = 2$, in der 3ten $n = 3$, so erhält man z. B. für die Reihe

1, 2, 5, 10, 17, 26 ....

folgende Gleichungen:

$$\underbrace{P + Q + R = 1}_{C.};\qquad \underbrace{4P + 2Q + R = 2}_{D.};$$

$$\underbrace{9P + 3Q + R = 5}_{E.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{C)} & 9P + 3Q + R = 5 \\ \text{D)} & 4P + 2Q + R = 2 \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{ subtrahirt.}$$

$$\underbrace{5P + Q = 3}_{\text{F.}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{D)} & 4P + 2Q + R = 2 \\ \text{E)} & P + Q + R = 1 \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{ subtrahirt}$$

$$\underbrace{3P + Q = 1}_{\text{G.}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{F.} & 5P + Q = 3 \\ \text{G.} & 3P + Q = 1 \\ & - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{ subtrahirt.}$$

$$2P = 2$$

$$\underbrace{P = 1}$$

Diesen Werth in F. giebt

$3 + Q = 1$, woraus $Q = -2$.

Beide Werthe von P und Q in B. giebt

$1 + (-2) + R = 1$, woraus $R = 2$.

Die gefundenen Werthe von P, Q und R substituire man nun in die Gleichung B., so ist

$T = 1 \,.\, n^2 + n \,.\, -2 + 2 = n^2 - 2n + 2$

das allgemeine Glied für die angeführte Reihe.

Durch eine ähnliche Arbeit findet man für die Reihe

35, 26, 20, 17, 17, 20, 26 . . . .

− 9, − 6, − 3, 0, 3, 6,

3, 3, 3, 3, 3,

durch die Gleichungen

$P + Q + R = 35$; $4P + 2Q + R = 26$;

$9P + 3Q + R = 20$.

für P, Q und R folgende Werthe

$$P = \frac{3}{2},\quad Q = -\frac{27}{2},\quad R = 47$$

und das allgemeine Glied

$$T = \frac{3}{2}n^2 - \frac{27}{n}n + 47.$$

Obige Reihe wird vielleicht dem Anfänger sonderbar vorkommen, und ich habe deßhalb die Differenzen zugesetzt, wodurch sich ihre Richtigkeit ergiebt.

Hier muß für $n = 4$ und $n = 5$, der Werth von $T = 17$ herauskommen.

$$n = 4)\ T = \frac{3}{2} \cdot 16 - \frac{27}{2} \cdot 4 + 47 =$$
$$= 3 \cdot 8 - 27 \cdot 2 + 47 = 24 - 54 + 47 = 17.$$
$$n = 5)\ T = \frac{3}{2} \cdot 25 - \frac{27}{2} \cdot 5 + 47 =$$
$$= \frac{75}{2} - \frac{135}{2} + 47 = -\frac{60}{2} + 47 =$$
$$= -30 + 47 = 17.$$

Durch ähnliche Arbeit und Gleichungen müßte man nun für jede gegebene Reihe des 2ten Ranges ein allgemeines Glied finden; man kann aber diese Arbeit mit einem Male abthun, wenn man für eine Buchstabenreihe ein allgemeines Glied auf dieselbe Art sucht.

Es sey das erste Glied einer solchen Reihe $= a$, das 2te $= b$, das 3te $= c$, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\underbrace{P + Q + R = a;}_{H.} \qquad \underbrace{4P + 2Q + R = b;}_{I.}$$

$$\underbrace{9P + 3Q + R = c}_{K.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} I) & 4P + 2Q + R = b \\ H) & P + Q + R = a \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{abgezogen.}$$

$$L)\quad 3P + Q = b - a$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{K)} & 9P + 3Q + R = c \\ \text{I)} & 4P + 2Q + R = b \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{ abgezogen.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{M)} & 5P + Q = c - b \\ \text{L)} & 3P + Q = b - a \\ & - \quad - \quad - \quad + \end{array}\right\} \text{ abgezogen.}$$

$$2P = a + c - 2b$$

$$\text{N)} \quad P = \frac{a + c - 2b}{2}$$

Den Werth aus N. in die Gleichung L.

$$3\left[\frac{a + c - 2b}{2}\right] + Q = b - a$$

$$3a + 3c - 6b + 2Q = 2b - 2a$$

$$2Q = 8b - 5a - 3c$$

$$\text{O)} \quad Q = \frac{8b - 5a - 3c}{2}$$

Den Werth aus N. und O. in die Gleichung H.

$$\frac{a + c - 2b}{2} + \frac{8b - 5a - 3c}{2} + R = a$$

$$a + c - 2b + 8b - 5a - 3c + 2R = 2a$$

$$2R = 6a - 6b + 2c$$

$$\text{P)} \quad R = \frac{6a - 6b + 2c}{2}$$

Man erhält also nun folgende Formel für das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Reihe des 2ten Ranges, nämlich

$$T = \left[\frac{a - 2b + c}{2}\right] n^2 + \left[\frac{8b - 5a - 3c}{2}\right] n + \left[\frac{6a - 6b + 2c}{2}\right]$$

$$\text{Q)} \quad T = \frac{(a - 2b + c)n^2 + (8b - 5a - 3c)n + (6a - 6b + 2c)}{2}$$

Die Formel auf obige Reihe

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37 ....

angewendet, giebt $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$, und wenn z. B. das 7te Glied gefunden werden soll, $n = 7$.

$$T = \frac{(1-2.2+5)\,49 + (16-5.1-3.5)\,7 + (6.1-6.2+2.5)}{2}$$

$$T = \frac{(1-4+5)\,49 + (16-5-15)\,7 + (6-12+10)}{2}$$

$$T = \frac{2.49 + 7.-4 + 4}{2} = \frac{98-28+4}{2} = \frac{74}{2} = 37.$$

Auf eine ähnliche Art würde man nun für jede gegebene Reihe des 2ten Ranges jedes Glied finden, sobald 3 Glieder davon bekannt sind; wenn man nämlich in O, n so viele Einheiten gelten läßt, als das wie vielste Glied man sucht: wo sodann a dem ersten, b dem 2ten, und c dem 3ten der gegebenen Glieder gleich ist.

§. 233.

(No. 45.)

Es ist nun auch nöthig, für die Reihen dieses Ranges eine Summenformel zu finden, welches auf folgende Art geschieht.

Man sieht leicht ein, daß die Summe einer solchen Reihe größer seyn muß, als selbst das größte Glied; es wird also auch eine Größe geben, welche, mit dem letzten Gliede multiplicirt, die Summe hervorbringt.

Eine solche Größe (eine Function von n) sey Fn, so ist:

B) $T = Pn^2 + Qn + R$ } mit Fn multiplicirt.

$$TFn = PFn^3 + QFn^2 + RFn.$$

Nun sey $TFn = S$, $PF = A$, $QF = B$ und $RF = C$, so ist

R) $\int = An^3 + Bn^2 + Cn.$

die Summenformel von n Glieder, der Reihe, wozu die Formel B. im vorigen §. das allgemeine Glied ist.

Man findet nun die unbekannten Coëfficienten A, B und C auf folgende Art: nämlich man bilde 3 Gleichungen, und setze einmal $\int$ = dem 1sten, einmal = dem 1sten und 2ten, und einmal = dem 1sten, 2ten und 3ten Gliede, und deßhalb in der ersten Gleichung $n = 1$, in der 2ten $n = 2$, und in der 3ten $n = 3$.

Für die Reihe

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37 . . . .,

würde man folgende 3 Gleichungen erhalten:

$$1 = A + B + C; \qquad 1 + 2 = 8A + 4B + 2C;$$

$$\underbrace{1 = A + B + C;}_{\text{S.}} \qquad \underbrace{3 = 8A + 4B + 2C;}_{\text{T.}}$$

$$1 + 2 + 5 = 27A + 9B + 3C$$

$$\underbrace{8 = 27A + 9B + 3C}_{\text{U.}}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{T)} & 3 = 8A + 4B + 2C \\ \text{2S)} & 2 = 2A + 2B + 2C \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$$\text{V)} \quad \underbrace{1 = 6A + 2B}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{U)} & 8 = 27A + 4B + 3C \\ \text{(S + T)} & 4 = 9A + 5B + 3C \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{W)} & \underbrace{4 = 18A + 4B} \\ \text{2V} & 2 = 12A + 4B \\ & - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$$2 = 6A$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} = A}$$

Den Werth von A in die Gleichung B. giebt

$$1 = 6 \cdot \frac{2}{3} + 2B$$

$$1 - 2 = 2B$$

$$-\frac{1}{2} = B$$

Den Werth von A und B in die Gleichung S. giebt

$$1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = C = \frac{9}{6} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

Endlich stelle man die Werthe von A, B und C in die Formel R., so ist

$$\text{X)}\quad S = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$$

Man findet nun von der gegebenen Reihe die Summe von so vielen Gliedern, als man n Einheiten gelten läßt. Z. B. man wollte durch diese Formel die Summe der 7 Glieder

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37 finden,

so ist $S = \frac{1}{3} \cdot 7^3 - \frac{1}{2} \cdot 7^2 + \frac{7}{6} \cdot 7$

$$S = \frac{343}{3} - \frac{49}{2} + \frac{49}{6}$$

$$S = \frac{686 - 147 + 49}{6} = \frac{588}{6} = 98$$

welches $= 1 + 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37$ ist.

Auf diese Art müßte man nun zu jeder gegebenen Reihe eine eigene Summenformel suchen; allein man kann hier ebenfalls wie mit dem allgemeinen Gliede verfahren, und die Reihe a, b, c annehmen; wo man sodann folgende 3 Gleichungen erhält:

$$\underbrace{a = A + B + C}_{I};\quad \underbrace{a + b = 8A + 4B + 2C}_{II};$$

$$\underbrace{a + b + c = 27A + 9B + 3C}_{III}$$

$$\left.\begin{array}{rr} II) & a + b = 8A + 4B + 2C \\ 2\,.\,I) & 2a = 2A + 2B + 2C \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\}\text{ſubtrahirt.}$$

$$IV)\ \underbrace{b - a = 6A + 2B}$$

$$\left.\begin{array}{rr} III) & a + b + c = 27A + 9B + 3C \\ 3\,.\,I) & 3a = 3A + 3B + 3C \\ & - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\}\text{ſubtrahirt.}$$

$$\left.\begin{array}{rr} V) & \underbrace{b + c - 2a = 24A + 6B} \\ 3\,.\,IV) & 3b - 3a = 18A + 6B \\ & - \quad + \quad - \quad - \end{array}\right\}\text{ſubtrahirt.}$$

$$c - 2b + a = 6A$$

$$\underbrace{\frac{a + c - 2b}{6} = A}$$

Dieſen Werth in IV ſubſtituirt, giebt

$$b - a = 6\left[\frac{a + c - 2b}{6}\right] + 2B$$

$$b - a - a - c + 2b = 2B$$

$$\frac{3b - 2a - c}{2} = B$$

oder $\underbrace{\frac{9b - 6a - 3c}{6} = B}$

Dieſen Werth von B und den vorigen von A in die Gleichung I, giebt

$$a = \frac{a + c - 2b}{6} + \frac{9b - 6a - 3c}{6} + C$$

$$a - \left[\frac{a + c - 2b}{6}\right] - \left[\frac{9b - 6a - 3c}{6}\right] = C$$

$$\frac{6a - a - c + 2b - 9b + 6a + 3c}{6} = C$$

$$\underbrace{\frac{11a - 7b + 2c}{6} = C}$$

Die Werthe von A, B und C stelle man in die Gleichung R., so erhält man

$$\text{Y)}\ \int = \frac{(a+c-2b)n^3+(9b-6a-3c)n^2+(11a+2c-7b)n}{6}$$

Nach dieser Formel kann man nun die Summe jeder beliebigen Anzahl Glieder finden, wenn man statt n die Zahl setzt, von wie viel Gliedern man die Summe sucht, und a = dem ersten, b = dem 2ten, und c = dem 3ten Gliede setzt.

Wollte man z. B. von der Reihe

1, 2, 5, 10, 17 . . . . .

die Summe von 50 Gliedern wissen, so ist

$$\int = \frac{(1+5-4)\ 125000+(18-6-15)\ 2500+(11+10-14)\ 50}{6}$$

$$\int = \frac{2.125000+2500.-3+7.50}{6} = \frac{250000-7500+350}{6}$$

$$= \frac{242850}{6} = 40475.$$

§. 234.

(No. 46.)

Daß die Formel R., nämlich

$$\int = An^3 + Bn^2 + Cn$$

wirklich die Summenformel einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges ist, läßt sich erweisen.

Man suche nämlich die Summe von $(n - 1)$ Gliedern, ziehe solche von der Summe von n Gliedern ab, so wird das $n$te oder allgemeine Glied übrig bleiben.

In obige $n - 1$ statt n gesetzt, giebt

$$\int^{\text{I}} = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1)$$

$$\int^{\text{I}} = A(n^3-3n^2+3n-1) + B(n^2-2n+1) + C(n-1)$$

$$\int^{\text{I}} = An^3-3An^2+3An-A+Bn^2-2Bn+B+Cn-C.$$

Diesen Ausdruck von R. abgezogen, so ist

$$
\begin{array}{l}
f = An^3 + Bn^2 + Cn \\
f = An^3 - 3An^2 + 3An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn - C \\
- \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad +
\end{array}
\Bigg\} \text{abgezogen.}
$$

$$f - f^1 = 3An^2 - 3An + A + 2Bn - B + C$$

oder $\underbrace{T = 3An^2 - 3An + A + 2Bn - B + C}$ (3.

Diese Formel muß also das $n$te Glied der Reihe seyn, wozu R. die Summenformel ist.

Man untersuche diese auf folgende Art: Es sey $n = 1$, so ist

$$T = 3A - 3A + A + 2B - B + C = A + B + C$$

das erste Glied der gesuchten Reihe.

Ferner sey $n = 2$, so ist

$$T = 12A - 6A + A + 4B - B + C$$
$$= 7A + 3B + C$$ das zweite Glied dieser Reihe.

Auch sey $n = 3$, so ist

$$T = 27A - 9A + A + 6B - B + C$$
$$= 19A + 5B + C$$ das dritte Glied der Reihe.

Endlich sey $n = 4$, so ist

$$T = 48A - 12A + A + 8B - B + C$$
$$= 37A + 7B + C$$ das 4te Glied der gesuchten Reihe.

Da bei einer Reihe des 2ten Ranges nur 3 Glieder nöthig sind, um die Reihe fortzusetzen, so hat man auch an 4 Gliedern genug, um zu sehen, ob die 2ten Differenzen bleibend sind, welches sich auf folgende Art findet:

Reihe.		1ste Differenzen.	2te Differenzen.
1. Glied	$A + B + C$		
		$6A + 2B$	
2. Glied	$7A + 3B + C$		$6A$
		$12A + 2B$	
3. Glied	$19A + 5B + C$		$6A$
		$18A + 2B$	
4. Glied	$37A + 7B + C$		

Es sind also die 2ten Differenzen beständig, und deßhalb die Reihe eine arithmetische des 2ten Ranges, und also auch Z. das allgemeine Glied, und R. die Summenformel einer solchen Reihe.

§. 235.

(No. 47.)

Es ist bereits im 231 §. gesagt worden, was arithmetische Reihen des 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. Ranges sind. So findet man zum Beispiel in der 3ten Potenz der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges. Als

A)	Reihe	1,	8,	27,	64,	125 . . . .
	1ste Differenzen	7,	19,	37,	61,	
	2te Differenzen		12,	18,	24,	
	3te Differenzen			6,	6.	

Es bilden also die Reihen der natürlichen Cubikzahlen eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges mit der beständigen (3ten) Differenz 6.

Eben so machen die 4ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine Reihe des 4ten Ranges. Als

B)	Reihe	1,	16,	81,	256,	625,	1296 . . .
	1ste Differenzen	15,	65,	175,	369,	671,	
	2te Differenzen		50,	110,	194,	302,	
	3te Differenzen			60,	84,	108,	
	4te Differenzen				24,	24,	

deren bleibende (4te) Differenz 24 ist.

Nicht minder sind die 5ten Potenzen eine arithmetische Reihe des 5ten Ranges. Als

C)	Reihe	1,	32,	243,	1024,	3125,	7776,	16807 . . .
	1ste Differenz.	31,	211,	781,	2101,	4651,	9031,	
	2te Differenzen		180,	570,	1320,	2550,	4380,	
	3te Differenzen			390,	750,	1230,	1830,	
	4te Differenzen				360,	480,	600,	
	5te Differenzen					120,	120,	

deren bleibende (5te) Differenz 120.

Eben so sind die 6te, 7te . . . *n*te Potenzen der natürlichen Zahlen, Reihen des 6ten, 7ten . . . *n*ten Ranges.

Zu allen solchen Reihen findet man durch ähnliches Verfahren, wie bei den vorhergehenden des 2ten Ranges, die allgemeinen Glieder und die Summenformeln.

So findet man z. B., daß jedes Glied einer arithmetischen Reihe des 3ten Ranges, aus der Summe einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges, und einer angenommenen Größe besteht.

Man wird also das *n*te Glied einer Reihe des 3ten Ranges durch

D) $T = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S$ vorstellen können, da es wohl gleichviel gilt, ob die unbekannten Coëfficienten A, B, C, oder P, Q, R heißen: man hat also in den 3 ersten Gliedern der Formel D. die Summe einer Reihe des 2ten Ranges, und in dem 4ten Gliede eine willkührlich zugesetzte Größe.

Diese Coëfficienten werden auf ähnliche Art, nur wie es sich von selbst versteht, hier durch 4 Gleichungen gefunden; woraus sich auch zugleich noch ergiebt, daß 4 Glieder gegeben seyn müssen. Hier ist die Reihe 1, 8, 27, 64. Also die Gleichungen:

E) $1 = P + Q + R + S$
F) $8 = 8P + 4Q + 2R + S$
G) $27 = 27P + 9Q + 3R + S$
H) $64 = 64P + 16Q + 4R + S.$

Verfährt man hier wie im 233 §., so ergeben sich für unsere vorhabende Reihe der natürlichen Cubikzahlen die unbekannten Coëfficienten

$$P = 1, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0.$$

Also das allgemeine Glied dieser Reihe

$$T = n^3.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung D. mit einer Function von n, z. B. Fn, so ist

$$TFn = FPn^4 + FQn^3 + FRn^2 + FSn$$

und nun $FTn = S$, $FP = A$, $FQ = B$, $FR = C$, $FS = D$, und nun die Summenformel

$$S = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$$

Für unsere angenommene Reihe der natürlichen Cubikzahlen würde man nun folgende 4 Gleichungen erhalten.

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + C + D \\ 9 &= 16A + 8B + 4C + 2D \\ 36 &= 81A + 27B + 9C + 3D \\ 100 &= 256A + 64B + 16C + 4D \end{aligned}$$

wodurch man

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4} \text{ und } D = 0 \text{ findet.}$$

Also nun

$$\int = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0\ .\ n =$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2\,(n^2 + 2n + 1)}{4} =$$

$$= \frac{n^2\,(n + 1)^2}{4} = \frac{[n\,(n + 1)]^2}{4} =$$

$$= \frac{[n(n + 1)]^2}{2} = [\tfrac{1}{2}n(n = 1)]^2.$$

§. 236.

(No. 48.)

Durch ähnliches Verfahren, wie §. 233. No. 45., würde man auch sowohl für die Reihen des 2ten Ranges, als auch jedes höhere allgemeine Glied und Summenformel, wie Ω und Y, welche durch die Buchstaben a, b, c, d . . . . ausgedrückt wären, finden können; da aber diese Reihen überhaupt wenig gebraucht werden, so will ich bloß die allgemeinen Glieder und Summenformeln der höheren Reihen hieher setzen.

2ter Rang.

A. $\begin{cases} T = Pn^2 + Qn + R \\ S = An^3 + Bn^2 + Cn. \end{cases}$

3ter Rang.

B. $\begin{cases} T = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S \\ S = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn. \end{cases}$

4ter Rang.

C. $\begin{cases} T = Pn^4 + Qn^3 + Rn^2 + Sn + U \\ S = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En. \end{cases}$

Wer die Eigenschaften dieser Formeln genau betrachtet, wird solche leicht fortsetzen, und auf den 6ten, 7ten . . . Rang anwenden können; auch wird er leicht einsehen, daß das allgemeine Glied und die Summenformel des $m$ten Ranges folgende sind:

$m$ter Rang.

$$T = Pn^m + Qn^{m-1} + Rn^{m-2} + \ldots + Yn + Z$$
$$S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \ldots + Gn^2 + Hn.$$

Auch könnte man für die arithmetischen Reihen des ersten Ranges

$$T = Pn + Q$$
$$S = An^2 + Bn$$

als allgemeines Glied und Summenformel gelten lassen, und sich durch ein ähnliches Verfahren, wie ich es im §. 234. No. 46. vornahm, überzeugen, daß diese Formeln richtig sind; so wie man sich überhaupt eben dadurch von der Richtigkeit von B. und C. überführt, wie ich es dort von A. gethan habe. Ich überlasse diese Untersuchungen dem eigenen Fleiße der Anfänger, und versichere nur noch, daß solche Bemühungen sich reichlich belohnen, und man dadurch, daß man immer noch etwas weiter geht, als man durch sein Lehrbuch geleitet wird, am ersten zu einer gewissen Fertigkeit gelangt.

Zur Versinnlichung des Vorhergehenden mag folgendes Beispiel dienen.

Aufgabe. 20 Soldaten, die sich beim Sturm auf eine Schanze ausgezeichnet hatten, sollten auf folgende Art belohnt werden. Der zuletzt die Brustwehr erstiegen hatte, sollte 4, der vorletzte 11, der folgende 21, der hierauf folgende 34 Thaler erhalten ꝛc.; was wird der erhalten, der zuerst die Schanze erstieg und wieviel Geld war im Ganzen zu vertheilen bestimmt?

Die gegebenen Glieder sind:

4,	11,	21,	34 ꝛc.	die Reihe
	7,	10,	13 ꝛc.	die ersten } Differenzen.
		3,	3, ꝛc.	die zweiten }

Man hat also eine arithmetische Reihe des zweiten Ranges, oder allgemeines Glied $= T = Pn^2 + Qn + R$

Es lassen sich also drei Gleichungen bilden, nämlich:

$4 = P + Q + R$, wo $T = 4 =$ dem 1ten Glied und $n = 1$

$11 = 4P + 2Q + R$, wo $T = 11 =$ dem 2ten Glied und $n = 2$

$21 = 9P + 3Q + R$, wo $T = 21 =$ dem 3ten Glied und $n = 3$.

Man hat also drei Gleichungen mit drei unbekannten Größen, welche durch das bekannte Verfahren gefunden werden.

$P = \frac{3}{2}$; $R = 0$ und $Q = \frac{5}{2}$, also das allgemeine Glied für obige Reihe

$$T = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 0 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n;$$

Durch diese Formel läßt sich nun jedes Glied der gegebenen Reihe finden. Man sucht hier das 20ste Glied, folglich ist $n = 20$ und deshalb

$T = \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n = \frac{n(3n + 5)}{2} = \frac{20(60 + 5)}{2}$ $= 10 . 65 = 650$ Thaler, welche der erhalten hat, welcher zuerst die Schanze erstieg.

Um den Betrag des Ganzen zu finden, muß nun erst die Summenformel gefunden werden. Es ist also für die Formel

$$S = An^3 + Bn^2 + Cn$$

$4 = A + B + C$, wo $S =$ der Summe von einem Gliede und $n = 1$;

$15 = 8A + 4B + 2C$, wo $S = 4 + 11 =$ der Summe von zwei Gliedern und $n = 2$;

$26 = 27A + 9B + 3C$, wo $S = 4 + 11 + 21 =$ der Summe von drei Gliedern und $n = 3$;

Aus diesen drei Gleichungen findet man $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ und $C = \frac{3}{2}$, also

$S = \frac{1}{2} n^3 + 2 n^2 + \frac{3}{2} n = \frac{n^3 + 4n^2 + 3n}{2} =$ $= \frac{n(n^2 + 4n + 3)}{2}$; da nun die Summe von 20 Gliedern gesucht wird, so ist hier $n = 20$, und daher

$$S = \frac{20(400 + 80 + 3)}{2} = 10 . 483 = 4830 \text{ Thlr.}$$

Zur Probe der Richtigkeit kann man die beiden Formeln für T und S schon bekannte Glieder wieder suchen. Z. B. für $n = 3$, ist

$T = \frac{3(9+5)}{2} = \frac{3.14}{2} = 3.7 = 21$ und $S = \frac{3(9 + 12 + 3)}{2} =$ $= \frac{3 . 24}{2} = 3 . 12 = 36.$

Auf ähnliche Art wird nun auch bei höhern Reihen verfahren, wo man für den $n$ten Rang $(n + 1)$ Gleichung haben muß, so wie man hier für den 2ten Rang, drei Gleichungen hatte.

Von den Polygonal-, vieleckigen oder sogenannten figurirten Zahlen.

§. 237.

(No. 49.)

Wenn man zu einer Reihe das 1ste Glied = 1 annimmt, und dann die Differenzen 1, 2, 3 . . . . seyn läßt, die Glieder dieser Reihe aber nach und nach addirt, so erhält man neue Reihen, deren Glieder Polygonal-, oder vieleckige Zahlen genannt werden.

Z. B. 1stes Glied = 1, Differenz = 1.

Reihe.

A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 . . . .

Von dieser Reihe nehme man nun zuerst ein Glied, dann die Summe von zwei Gliedern, sodann von drei Gliedern u. s. w., so erhält man folgende Reihe:

B) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 . . . .

deren Glieder dreieckige oder Triangular-Zahlen genannt werden, und zwar aus dem Grunde, weil sich aus solchen regelmäßige, gleichseitige Dreiecke formiren lassen,

I	II	III	IV	V
1	3	6	10	15 . . . . .
.	. .	. . .	. . . .	. . . . .
	.	. .	. . .	. . . .
		.	. .	. . .
			.	. .
				.

wo die Seiten der Dreiecke immer die Glieder der Reihe A., die Summe der ganzen Dreiecke aber die Glieder der Reihe B. ausmachen.

Sollte man nun aus der Seite eines solchen Dreiecks seinen Inhalt finden, so ergiebt sich bald, daß diese Drei-

ecke arithmetische Reihen des ersten Ranges sind, deren erstes Glied a immer $= 1$, d die Differenz, und n die Anzahl der Glieder = der gegebenen Seite, das letzte Glied t aber ebenfalls $= n$ ist.

Man kann also die Formel II der arithmetischen Reihen des ersten Ranges dazu benutzen, nämlich

C) $\int = (a + t) \frac{n}{2}$.

Hier ist also $a = 1$, $t = n$, folglich

$$\int = (1 + n) \frac{n}{2}$$

und für Dreieck I) $\int = (1 + 1) \frac{1}{2} = 1$

für Dreieck II) $\int = (1 + 2) \frac{2}{2} = 3$

für Dreieck III) $\int = (1 + 3) \frac{3}{2} = 6$

für Dreieck IV) $\int = (1 + 4) \frac{4}{2} = 10$

für Dreieck V) $\int = (1 + 5) \frac{5}{2} = 15$ u. s. w.

Es ist also die Summenformel der dreieckigen Zahlen

D) $\int = (1 + n) \frac{n}{2}$, und $t = n$.

§. 238.
(No. 50.)

Setzt man das erste Glied = 1, und die Differenz = 2, so erhält man folgende Reihe

E) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 . . . .

und durch Summirung der Glieder die Reihe

F) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 . . .

welche Zahlen viereckige oder Quadratzahlen genannt werden; welcher letztere Name sich auch schon aus den Zahlen selbst ergiebt, da sie nichts anderes sind, als die gewöhnlichen 2ten Potenzen der natürlichen Zahlen.

Den Namen viereckige Zahlen verdienen sie um so mehr, da sich ihre Glieder in regelmäßige, gleichseitige Vierecke (Quadrate) ordnen lassen. Z. B.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
.	. .	. . .	. . . .	. . . . .	. . . . . .
1)	. .	. . .	. . . .	. . . . .	
	4)	. . .	. . . .	. . . . .	
		9)	. . . .	. . . . .	
			16)	. . . . .	
				25)	

wo die Seiten die Glieder der Reihe A., die Summe der ganzen Vierecke aber die Glieder der Reihe F. andeuten.

In diesem Falle ist $a = n = t$, mithin

G) $s = (a + t)\,\frac{n}{2} = (n + n)\,\frac{n}{2} = 2n \,.\, \frac{n}{2} = n^2$

wovon sich die Richtigkeit deutlich ergiebt, da die Summe immer = ist dem Quadrate der Seite.

§. 239.

(No. 51.)

Setzt man das erste Glied = 1, und die Differenz = 3, so erhält man die Reihe

G) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 . . . .

und durch die Summirung der Glieder die Reihe

H) 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 . . . .

welche Zahlen fünfeckige oder Pentagonal-Zahlen genannt werden: es lassen sich jedoch ihre Glieder nicht mehr in regelmäßige Fünfecke ordnen, eben so wenig wie die sechs-, sieben . . . . eckigen Zahlen, und ist ihre Benennung mehr Folge der vorhergehenden.

Bei Untersuchung der Reihe H. ergiebt sich, daß es eine arithmetische Reihe des zweiten Ranges ist, nämlich

1, 5, 12, 22, 35 . . . .
4, 7, 10, 13,
3, 3, 3,

Durch die Formel R. §. 233. No. 45 findet man die Summe dieser Reihe

$$f = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Fährt man mit diesen Untersuchungen fort, und setzt das erste Glied = 1, und die Differenz = 4, so erhält man die Reihe

J) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 ....

und durch Summirung der Glieder die Reihe

K) 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 ....

deren Glieder Sexagonal-, oder sechseckige Zahlen genannt werden. Man findet hier die Reihe

der 1sten Differenz 5, 9, 13, 17, 21 ....

2te Differenz 4, 4, 4, 4,

mithin ebenfalls eine arithmetische Reihe des 2ten Ranges, wovon sich wieder nach Formel R. §. 233. No. 45. die Summenformel

$$f = 2n^2 - n \text{ findet.}$$

§. 240.

(No. 52.)

Bei fortgesetzten Untersuchungen findet man für die 7eckigen Zahlen

$$f = \frac{5n^2 - 3n}{2}$$

für die 8eckigen

$$f = \frac{6n^2 - 4n}{2}$$

für die 9eckigen

$$f = \frac{7n^2 - 5n}{2} \quad \text{u. s. w.}$$

Stellt man nun zwischen allen den gefundenen Summenformeln für die vieleckigen Zahlen, Vergleichungen an, so werden sich leicht alle übrige ergeben. Nämlich es ist die Summe der

3eckigen $= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

der 4eckigen $= n^2 = \frac{2n^2 + 0 \cdot n}{2}$

der 5eckigen $= \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$

der 6eckigen $= n(2n-1) = \frac{4n^2-2n}{2}$

der 7eckigen $= \frac{n(5n-3)}{2} = \frac{5n^2-3n}{2}$

woraus sich nun schon hinlänglich das Gesetz ergiebt, nach welchem diese Formeln wachsen. So ist also die Summe der

8eckigen Zahlen $= \frac{6n^2-4n}{2} = 3n^2 - 2n =$
$= n(3n-2)$

9eckigen Zahlen $= \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

10eckigen Zahlen $= \frac{8n^2-6n}{2} = 4n^2 - 3n =$
$n(4n-3)$.

Man findet nun gar leicht das für die Summe der *m*eckigen Zahlen

L) $\int = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$

wo, wie bei allen vorigen Formeln, *m* die Anzahl der Ecken des Vielecks, und *n* die Summe einer Seite angiebt.

§. 241.

(No. 53.)

Obschon die Aufgaben über diese Zahlen wenig vorkommen, so will ich doch einige davon hierher setzen, um dem Anfänger zu zeigen, wie diese Formeln gebraucht werden.

Aufgabe 1. Man soll die 25eckige Zahl von 36 angeben; d. h. man soll finden, wie viel die Summe ei-

nes 25ecks beträgt, wenn die Seite 36 ist. So ist nach Formel L. $m = 25$, und $n = 36$. Also

$$f = \frac{(25-2)\,36^2 - (25-4)\,36}{2} = \frac{23\,.\,36^2 - 21\,.\,36}{2} =$$

$$= \frac{23\,.\,1296 - 21\,.\,36}{2} = 23\,.\,648 - 21\,.\,18 =$$

$$= 14904 - 378 = 14526.$$

Aufgabe 2. Ein Spion, der die Stärke des feindlichen Armee-Corps auskundschaften soll, schreibt durch eine zurückgehende Gelegenheit: ich habe die 365eckige Zahl von 12 gefunden. Wie stark ist das Corps?

$$f = \frac{(365-2)\,12 - (365-4)\,12}{2} =$$

$$= \frac{363\,.\,144 - 361\,.\,12}{2} = 363\,.\,72 - 361\,.\,6 =$$

$$= 26136 - 2166 = 23970.$$

Aufgabe 3. Ein Officier, der zum Recognosciren eines feindlichen Lagers ausgeschickt worden ist, meldet seinem General durch ein Billet die Anzahl der Regimenter, welche er im Lager beobachtet hat, auf folgende Art, damit der Bote, wenn er das Billet eröffnen sollte, die Nachricht nicht versteht; „Die dreieckige, viereckige und fünfeckige Zahl machen zusammen 147 aus.“ Wie viel betrug die Anzahl der feindlichen Regimenter?

Hier ist also die Seite n der dreieckigen, viereckigen und fünfeckigen Zahlen zu suchen.

So ist also nach den drei zuerst gefundenen Formeln

$$\frac{n^2+n}{2} + n^2 + \frac{3n^2-n}{2} = 147$$

$$n^2 + n + 2n^2 + 3n^2 - n = 294$$

$$6n^2 = 294$$

$$n^2 = 49$$

$n = 7$ die Zahl der Regimenter.

Wovon $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$
die dreieckige Zahl von 7,

und $n^2 = 7 \,.\, 7 = \;.\;.\;.\; 49$
die viereckige Zahl von 7;

endlich $\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3 \,.\, 49 - 7}{2} = \frac{140}{2} = 70$
die fünfeckige Zahl von 7.

Summe $= 147$

Aufgabe 4. Man soll die Summe der 8, 9 und 10eckigen Zahlen von 5 finden? Hier ist

$$\int = \frac{6n^2 - 4n}{2} + \frac{7n^2 - 5n}{2} + \frac{8n^2 - 6n}{2}$$
$$= \frac{n(6n - 4)}{2} + \frac{n(7n - 5)}{2} + \frac{n(8n - 6)}{2}$$
$$= \frac{n(6n - 4) + n(7n - 5) + n(8n - 6)}{2}$$

hier ist also $n = 5$ und

$$\int = \frac{5\,(30 - 4) + 5\,(35 - 5) + 5\,(40 - 6)}{2} =$$
$$= \frac{5 \,.\, 26 + 5 \,.\, 30 + 5 \,.\, 34}{2} = 5 \,.\, 13 + 5 \,.\, 15$$
$$+ 5 \,.\, 17 = 225.$$

Aufgabe 5. Von welcher Zahl betragen die 5, 6 und 7eckigen Zahlen zusammen 360? Hier ist

$$\frac{3n^2 - n}{2} + \frac{4n^2 - 2n}{2} + \frac{5n^2 - 3n}{2} = 360$$
$$12n^2 - 6n = 720$$
$$n^2 - \tfrac{1}{2}n = 60$$
$$\text{was} \quad n = 8.$$

Von den Pyramidal-Zahlen.

§. 242.

(No. 54.)

Wenn man die Glieder der Reihe B. §. 237. No. 49, nämlich die dreieckigen Polygonal-Zahlen

B) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 . . . .

nach und nach addirt, so erhält man die Reihe

M) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120 . . . .

deren Glieder geeignet sind, sich in regelmäßige dreiseitige Pyramiden oder Spitzsäulen aufsetzen zu lassen: nämlich es lassen sich z. B. 4 Kugeln von gleicher Größe so setzen, daß unten 3 ein Dreieck bilden und darauf eine liegt.

[. . . .] = 3 + 1 = 4.

Eben so lassen sich 10 Kugeln von gleicher Größe so legen, daß unten 6 liegen, hierauf 3, und endlich eine

[. . . . .] = 6 + 3 + 1 = 10

und eben so würde sich aus 120 Kugeln eine dreiseitige Pyramide machen lassen, welche 8 Reihen über einander hätte, deren unterste 36, die zweite 28 u. s. w., und die obere eine Kugel enthielt.

Betrachtet man die Reihe M. genau, so ergiebt sich, daß es eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges mit der beständigen (3ten) Differenz = 1 ist: es kann also die Formel

$$s = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$$

B) § 236. No. 48 angewendet, und durch die früher gezeigten Kunstgriffe verwandelt werden, wo man sodann $A = 0$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{2}$ und $D = \frac{2}{6}$, und überhaupt

$$f = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{2}{6}n = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ erhält.

§. 243.

(No. 55)

Eben so kann man durch Summirung der Glieder der Reihe F. §. 238. No. 50 eine neue Reihe bilden, deren Glieder sich in viereckige Pyramiden oder Spitzsäulen ordnen lassen. Es war

F) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ....

und durch Addition der Glieder die Reihe

N) 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204 .....

Wo z. B. aus 4 und 1 gleich großen Kugeln sich eine 4seitige Pyramide bilden läßt.

= 4 + 1 = 5.

Eben so aus 14 Kugeln

= 9 + 4 + 1 = 14 u. s. w.

und so kann aus 204 Kugeln eine solche Pyramide gesetzt werden, deren unterste Schicht 64, die 2te von unten 49, die dritte 36 u. s. w., und die letzte (obere) 1 Kugel enthält.

Nun ist die Reihe N. ebenfalls eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges, von der beständigen (3ten) Dif-

ferenz 3, deren Summenformel wieder durch die, im vorigen §. bezogene, Formel gefunden wird; nämlich durch

$$f = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$$

wo man durch das bekannte Verfahren wieder

$$A = 0,\ B = \frac{2}{6},\ C = \frac{3}{6},\ D = \frac{1}{6}$$ erhält,

woraus nun

$$f = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

Wollte man für die Reihen M. und N. die allgemeinen Glieder haben, so sind solche nichts anders als die Summenformeln der Reihen B. und F., woraus M. und N. entstanden sind; nämlich für M. ist

$$T = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

und für N.

$$T = n^2.$$

Eben so würde man durch Summirung der Reihe H. der 5eckigen Zahlen, die Reihe der fünfeckigen Pyramidalzahlen erhalten; nämlich

1, 6, 18, 40, 75, 126 . . . .

eben so durch Summirung der Reihe K. die Reihe der sechseckigen Pyramidalzahlen; nämlich

1, 7, 22, 50, 95, 161 . . . .

u. s. w.

Diese Reihen führen aber ebenfalls bloß der Folge der vorhergehenden halber den Namen; und lassen sich eben so wenig in Spitzsäulen setzen, als die Reihen H. und K. sich in Vielecke ordnen ließen.

Da übrigens diese Reihen weiter keinen wesentlichen Nutzen bringen, so will ich nur im Allgemeinen noch Folgendes erwähnen:

Die Reihen der drei- und viereckigen Pyramidalzahlen finden ihre Anwendung bei Berechnung der Kugelhau-

fen, welche man in Festungen, vor Zeughäusern u. s. w. findet: da aber diese Rechnungen nicht für Jeden gleich interessant sind, ich auch übrigens eine eigene Abhandlung darüber geliefert habe, welche 1818 bei Graß und Barth in Breslau erschienen ist, so will ich im folgenden §. bloß die Formeln zu Berechnung der verschiedenen Haufen und die Hauptregel angeben; was aber die Entwickelung dieser Formeln anbelangt, meine Leser, welche davon Gebrauch zu machen nöthig haben, auf jene Abhandlung: Ueber die Berechnung der Kugelhaufen u. s. w., verweisen.

§. 244.

(No. 56.)

Formeln zu Berechnung der Kugelhaufen.

1) Für die dreieckige Pyramide, deren Seiten und Grundfläche regelmäßige Dreiecke sind, ist

$$s = \frac{n(n+1)\ (n+2)}{6}$$

wo n die Anzahl der Schichten, oder was einerlei ist, die Kugeln in einer Seite irgend eines der Dreiecke anzeigt.

2) Für die viereckigen Pyramiden, deren Seiten Dreiecke, die Grundfläche aber ein Quadrat ist,

$$S = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

3) Für lange Haufen, deren Grundflächen Rechtecke, die schmalen Seitenflächen Dreiecke und die langen Seitenflächen Trapeze sind

$$s = \frac{n(n+1)\ (2n+3m-2)}{6}$$

wo n wieder die vorige Bedeutung, m aber der Rükken des Haufens, oder die obere Schicht von einer Kugelbreite anzeigt.

4) Für eben solche, aber unvollkommene Haufen, wo der Rücken oder auch noch mehrere völlige Schichten fehlen,

$$f = \frac{n(n+1)\ (3r+1-n)}{6}$$

wo n die Anzahl der Lagen, r aber die Anzahl der Kugeln in der untern langen Seite bedeuten.

5) Für lange Haufen, welche zu beiden Seiten an drei- oder viereckige Pyramiden angelehnt sind,

$$f = \frac{n(n+1)\ (3m-2n+2)}{6}$$

wo n die Anzahl der Schichten, m aber der Rücken ist.

6) Für lange Haufen, welche nur auf einer Seite an eine Pyramide angelehnt sind,

$$f = \frac{m\ .\ n\ (n+1)}{2}$$

wo n und m in voriger Bedeutung bleiben.

7) Für Haufen, welche hohle Vierecke bilden,

$$f = \frac{m\ .\ n(n+1)}{2}$$

wo Alles wie vorher bleibt.

8) Für Haufen, wie die vorigen, welche mit einem Eingang versehen sind,

$$f = \frac{n(n+1)\ (2n+3m-2)}{6}$$

wie No. 3, wo auch alles Uebrige so bleibt.

Aus allen vorgenannten Formeln ist folgende allgemeine Regel für alle Arten von vollen Kugelhaufen abgeleitet.

Man addire den Rücken und die beiden mit ihm parallel laufenden Grundzeilen, und multiplicire $\frac{1}{3}$ dieser Summe mit einem Seiten-Dreieck, so erhält man die Summe der in dem Haufen befindlichen Kugeln.

Ist aber der Kugelhaufen ein unvollkommener, so berechne man ihn, als wenn er vollständig wäre, was

nicht schwer ist, da man leicht die fehlenden Reihen und somit auch die obere Reihe überschlagen kann; dann berechne man den fehlenden Theil als besondern Haufen und ziehe dieses Resultat von dem vorigen ab.

Da das Aufstellen einer gewissen Anzahl Kugeln in einem bestimmten Haufen noch weniger hierher, sondern eigentlich in das Gebiet der höheren Gleichung gehört, so übergehe ich solches hier ganz, und verweise meine Leser abermals auf die mehr bezogene Abhandlung.

Von Verbindung und Versetzung der Größen.

§. 245.
(No. 57.)

Man kann mit mehreren Größen Untersuchungen anstellen, wie oft solche sich verbinden lassen; z. B. können die Größen a, b und c zu zweien auf drei verschiedene Arten verbunden werden, nämlich ab, ac, bc; eben so die Factoren 3, 4 und 5; nämlich $3 \cdot 4$, $3 \cdot 5$, $4 \cdot 5$, das heißt, die Producte 12, 15 und 20 können aus den drei Factoren, wenn immer zwei zusammen multiplicirt werden, entstehen.

Untersuchungen dieser Art und die daraus hergeleiteten Regeln und Formeln machen die Lehre von den Verbindungen aus (de Combinatione).

Wenn man aber untersucht, wie oft die Größen a, b und c sich versetzen lassen, so will man wissen, wie oft mit den 3 Größen a, b und c eine Verwechselung ihrer Plätze stattfinden kann. Hier kann man setzen abc, bac bca, acb, cab, cba, man kann also diese 3 Größen 6 Mal versetzen, ohne daß wieder abc, d. h. ihre vorige Stellung herauskömmt.

Diese Untersuchungen, und die daraus abgeleiteten Regeln, nennt man die **Lehre von der Versetzung der Größen** (de Permutatione).

§. 246.

(No. 58.)

Unter 2 Größen, a und b, findet nur die einzige Verbindung ab zu zweien statt; kömmt aber die 3te Größe c hinzu, so kann solche noch mit a und b verbunden werden; und man hat ab, ac und bc; es sind also $1 + 2 = 3$ Verbindungen möglich. Kömmt hier noch die 4te Größe d hinzu, so kann solche wieder mit jeder der 3 vorigen verbunden werden, und man hat außer ab, ac und bc, noch ad, bd und cd, also $1 + 2 + 3 = 6$ Verbindungen. Auf eine ähnliche Art findet man für 5 Größen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, für 6 Größen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ mögliche Verbindungen.

Da nun die Zahlen 1, 3, 6, 10 . . . Glieder einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges sind, so läßt sich hierzu ein allgemeines Glied finden; es muß jedoch 0 als erstes Glied dieser Reihe vorgesetzt werden, weil bei einer Größe keine Verbindung zu zweien möglich ist. So ist nun diese Reihe

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21 . . .

wozu man das allgemeine Glied durch die früher entwickelte Formel

$$\frac{(a + c - 2b)n^2 + (8b - 5a - 3c)n + (6a + 2c - 6b)}{2} = T$$

findet. Nämlich

$$\frac{(0 + 3 - 2.1)n^2 + (8.1 - 5.0 - 3.3)n + (6.0 + 2.3 - 6.1)}{2}$$

$$= \frac{(3 - 2)n^2 + n . - 1 + 0}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

= der Anzahl der Verbindungen zu zweien bei n Größen

Beispiel.

Ein Balletmeister bekömmt den Auftrag, für 6 Theatertänzerinnen einen Tanz zu componiren, der so viel Touren hat, daß jede Tänzerin mit jeder der 5 übrigen eine Tour macht: wie viel Touren muß dieser Tanz haben?

Auflösung.

$$\frac{n\,.\,(n-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 3\,.\,5 = 15.$$

Denn benennt man die 6 Tänzerinnen mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e* u. *f*., so ist Folgendes die Verbindung zu zweien:

ab, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *df* und *ef*.

§. 247.

(No. 59.)

Sollen die Größen zu dreien verbunden werden, so ist bei einer und bei zwei Größen noch keine Verbindung, und wenn die dritte Größe hinzu kömmt, erst eine Verbindung möglich; nämlich *abc*. Kömmt die 4te Größe hinzu, so läßt sie sich noch mit jeder Doppelverbindung, nämlich mit *ab*, *ac* und *bc* verbinden, und man hat *abd*, *acd*, *bcd* und *abc* mit $1 + 3 = 4$ Verbindungen zu dreien, bei 4 Größen.

Setzt man noch die 5te Größe zu, so giebt solche mit den 6 Doppelverbindungen der 4 ersten noch 6 andere zu dreien.

Es wären z. B. die Größen *a*, *b*, *c*, *d* und *e*, so sind die Doppelverbindungen der ersten 4, *ab*, *ac*, *ad*, *bd*, *bc*, *cd*, mithin hier mit *e* verbunden, giebt *abe*, *ace*, *ade*, *bde*, *bce*, *cde*, hiezu die 4 vorigen Verbindungen zu drei *abd*, *acd*, *bcd* und *abc*, giebt die Verbindungen zu dreien bei 5 Größen

$$1 + 3 + 6 = 10.$$

Durch eine ähnliche Untersuchung findet man für 6 Größen 20 Verbindungen zu dreien, für 7 Größen 35 u. s. w.

Es sind aber diese Zahlen 1, 4, 10, 20, 35 . . . . Glieder einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges, welcher aber wieder als erstes und zweites Glied 0 vorgesetzt werden muß. Die Reihe ist also

0, 0, 1, 4, 10, 20, 35 . . .

Zu dieser Reihe findet man das allgemeine Glied durch die früher angegebene Formel für die arithmetischen Reihen des 3ten Ranges, nämlich durch

$$T = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S$$

wo man auf die schon mehrmals gezeigte Art folgende 4 Gleichungen erhält.

A) $P + Q + R + S = 0$

B) $8P + 4Q + 2R + S = 0$

C) $27P + 9Q + 3R + S = 1$

D) $64P + 16Q + 4R + S = 4.$

A. von B. subtrahirt, giebt

E) $7P + 3Q + R = 0$

B. von C. giebt

F) $19P + 5Q + R = 1$

C. von D. giebt

G) $37P + 7Q + R = 3$

E. von F. giebt

H) $12P + 2Q = 1$

F. von G. giebt

I) $18P + 2Q = 2$

H. von I) $6P = 1$

K) $P = \frac{1}{6}$

In H. substituirt, erhält man

L) $Q = -\frac{1}{2}$

Aus K. und L. in E. substituirt, giebt

M) $R = \frac{1}{3}$

Aus M., L. und K. in A. substituirt, giebt

$$S = 0.$$

Mithin das allgemeine Glied der obigen Reihe oder die Anzahl der Verbindung zu dreien bei n Größen:

$$T = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n + 0$$

$$T = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

$$T = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

B e i s p i e l.

Vor einigen Jahren kündigte ein Kupferstecher in Frankfurt am Main ein Werk an, in welchem Jeder, der nur zwei Vornamen hätte, die drei Anfangsbuchstaben seines Namens geschmackvoll verzogen finden sollte. Es müssen also hierin alle 25 Buchstaben des Alphabets zu dreien verbunden seyn. Wie viel Züge muß dieses Werk enthalten? Hier ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 25 \cdot 4 \cdot 23 = 100 \cdot 23 = 2300 \text{ Züge.}$$

§. 248.

(No. 60.)

Macht man nun eine ähnliche Untersuchung mit 4 Größen, so findet man, daß bei einer, zwei und drei Größen gar keine, bei 4 Größen eine, und bei 5 Größen 5 Verbindungen möglich sind. Bei 6 Größen sind 15 Verbindungen zu 3 möglich u. s. w. Man erhält also die Reihe

$$0, \; 0, \; 0, \; 1, \; 5, \; 15 \ldots\ldots$$

welche eine arithmetische Reihe des 4ten Ranges ist, wozu man durch eine ähnliche Arbeit, wie im vorigen §., und zwar durch die Formel

$$T = Pn^4 + Qn^3 + Rn^2 + Sn + U$$

das allgemeine Glied

$$T = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1} = \text{der Anzahl}$$

der Verbindungen zu 4 bei n Größen.

Eben so findet man bei n Größen die Verbindungen zu 5

$$T = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{5\ .\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1}$$

aus welchen Formeln allen man sieht, daß solche sich leicht für mehrere Größen fortsetzen lassen.

Eben so sieht man, daß die Anzahl der Verbindungen bei n Größen, wenn immer m Größen beisammen stehen sollen, ist

$$T = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ .\ .\ .\ .\ .\ [n-(m-1)]}{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ .\ .\ .\ .\ .\ 1}$$

So würden z. B. bei 20 Größen die Verbindungen zu 8 Größen seyn

$$\frac{20\ .\ 19\ .\ 18\ .\ 17\ .\ 16\ .\ 15\ .\ 14\ .\ 13}{8\ .\ 7\ .\ 6\ .\ 5\ .\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1} =$$

$$5\ .\ 19\ .\ 3\ .\ 17\ .\ 2\ .\ 13 = 125970.$$

§. 249.

(No. 61.)

Beispiele.

1) Wie viele Amben (Verbindungen zu zweien) sind bei einer Zahlen-Lotterie, oder sogenanntem Lotto von 90 Nummern möglich?

$$\frac{90\ .\ 89}{2\ .\ 1} = 45\ .\ 89 = 4005.$$

2) Wie viele Ternen (Verbindungen zu dreien) giebt es in eben diesem Spiele?

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \cdot 89 \cdot 44 = 117480.$$

3) Wie viel Quaternen oder Verbindungen zu vieren giebt es im Lotto?

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \cdot 89 \cdot 11 \cdot 87 =$$
$$= 2555190.$$

4) Wie viel Quinternen oder Verbindungen zu fünfen giebt's in diesem Spiel?

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 89 \cdot 11 \cdot 87 \cdot 86 =$$
$$= 43949268.$$

5) Man will in einer Lotterie, wie die vorerwähnte, so viel Zettel zu 5 Nummern setzen, damit man auf jeden Fall alle die, bei der Ziehung herauskommenden, 5 Nummern auf einem Zettel beisammen habe; das heißt eine Quinterne gewinnen. Wie viel Zettel muß man setzen?

Die Antwort ist die von No. 4.

43949268 Zettel.

6) Wie viel Quaternen sind auf dieser Anzahl von Zetteln, wo nur eine Quinterne vorkommen kann, möglich?

Es können bei den 5 gezogenen Nummern

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \text{ Quaternen vorkommen.}$$

Da der Spieler nun diese 5 möglichen Quaternen in Verbindung mit allen 85 fehlenden Nummern haben muß, so kann er

$5 \cdot 85 = 425$ Quaternen gewinnen.

7) Er muß aber auch eine Anzahl Ternen mit diesen Zetteln gewinnen; wie viele werden es seyn?

Bei den 5 gezogenen Nummern sind

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ Ternen möglich.}$$

Da er nun solche mit jeder Verbindung zu zweien der 85 fehlenden Nummern haben kann, so fragt sich erst, wie oft die 85 fehlenden zu 2 verbunden werden können, d. i.

$$\frac{85 \,.\, 84}{2 \,.\, 1} = 85 \,.\, 42 = 3570 \text{ Mal,}$$

Er kann also 3570 . 10 = 35700 Ternen gewinnen.

8) Wie viele Amben werden auf den gespielten Zetteln vorkommen?

Hier ist wieder erst die Frage, wie viel Amben sich aus den gezogenen 5 Nummern machen lassen?

Nämlich $\frac{5 \,.\, 4}{2 \,.\, 1} = 10$ Amben können aus den 5 gezogenen Nummern gemacht werden.

Diese können aber mit jeder Verbindung zu 3 der 85 fehlenden Nummern vorkommen; d. i.

$\frac{85 \,.\, 84 \,.\, 83}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 98770$ Mal, folglich kann der Spieler 98770 . 10 = 987700 Amben gewinnen.

9) Endlich wie viel einzelne Auszüge kann er gewinnen?

Hier können die 5 getroffenen Nummern mit jeder Verbindung zu 4 der 85 fehlenden Nummern vorkommen, d. i.

$$\frac{85 \,.\, 84 \,.\, 83 \,.\, 82}{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} \,.\, 5 = 10123925 \text{ Auszüge.}$$

10) Nun läßt sich auch noch finden, wie viel Zettel ganz leer ausgehen; nämlich so oft sich die 85 nicht herausgekommenen Nummern zu 5 verbinden lassen, d. i.

$$\frac{85 \,.\, 84 \,.\, 83 \,.\, 82 \,.\, 81}{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 32801517.$$

Als Probe über die Rechnungen 5, 6, 7, 8, 9, 10

hat man nach	5	1	Quinterne.
— — —	6	425	Quaternen.
— — —	7	35700	Ternen.
— — —	8	987700	Amben.
— — —	9	10123925	Auszüge.
— — —	10	32801517	Nieten.
Summa aller Zettel		43949268	wie No. 5.

11) Da von allen 90 Nummern, wo immer 5 herauskommen, 4005 Amben möglich sind; so fragt sich, wie sich die Wahrscheinlichkeit, eine Ambe zu gewinnen, zur Unwahrscheinlichkeit verhält, wenn einer 5 Nummern auf einem Loose hat.

Hier ist bloß zu entscheiden, wie viel der Spieler bei 5 Nummern Amben haben kann, d. i.

$$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ Amben.}$$

Da nun 4005 Amben möglich sind, der Spieler aber nur 10 machen kann, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit des Treffens zur Unwahrscheinlichkeit wie 10 : 4005, d. i. wie 2 : 801.

12) Eben so kann man finden, wie sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit des Treffens bei der Terne verhält, wenn einer 5 Nummern auf einem Zettel spielt.

Hier sind 117480 Ternen möglich.

Der Spieler aber kann

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Ternen in seinen 5 Nummern haben; folglich verhält sich

$$W : UW = 10 : 117480 \text{ oder}$$
$$W : UW = 1 : 11748.$$

Da es nun 2555190 Quaternen giebt, und der Spieler auf 5 Nummern nur $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 5$ Quaternen haben kann, so ist in diesem Falle

$$W : UW = 5 : 2555190$$
$$W : UW = 1 : 511038.$$

Endlich, da bei 5 Nummern nur eine Quinterne möglich ist, so ist hier, da es 43949268 Quinternen giebt

$$W : UW = 1 : 43949268.$$

Aus diesen Beispielen wird hinlänglich zu ersehen seyn, wie und zu welchem Zweck die Verbindungen der Größen gebraucht werden.

§. 250.

(No. 62.)

Eine Größe *a* läßt sich nur ein Mal ansetzen, kömmt aber eine zweite *b* hinzu, so kann man *ab* und *ba* setzen; es sind also bei einer Größe 1, bei zwei Größen 1 . 2 Versetzungen möglich. Kömmt die dritte Größe *c* hinzu, so kann man solche bei beiden vorigen Versetzungen drei Mal, nämlich vorne, in der Mitte und hinten anbringen:

abc, *acb*, *cab*, *bac*, *bca* und *cba*

also sind 1 . 2 . 3 Versetzungen bei 3 Größen möglich.

Kömmt *d* hinzu, so kann es bei den vorigen Versetzungen bei jeder 4 Mal, nämlich vorne, hinten, und zwei Mal an den mittleren Stellen angebracht werden, so daß bei 4 Größen 4 . 6 = 24 = 1 . 2 . 3 . 4 Verbindungen Statt finden; als *dabc*, *adbc*, *abdc*, *abcd* u. s. w.

Fährt man mit dieser Untersuchung fort, so findet man für 5 Größen 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120, bei 6 Größen 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720 u. s. w., und bei *n* Größen 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . . . *n* mögliche Versetzungen.

§. 251.[a]

(No. 63.[a])

Beispiele.

1) Wie oft können 8 Personen an einer Tafel ihre Plätze wechseln, bis jeder wieder seinen ersten Platz erhält?

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 = 40320 Mal.

2) Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

620448401733239439360000 Mal.

Alle Menschen auf dem Erdboden würden, nach einer ungefähren Berechnung, nicht in tausend Millionen Jahren alle Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn jeder täglich 40 Seiten schrieb, und auf jeder Seite 40 Versetzungen enthalten wären.

3) 10 Officiere kamen in ein Wirthshaus ihrer Garnison, und sagten dem Wirth, sie wollten ihm Jeder 20 Thlr. im Voraus bezahlen, wofür er sie so lange beköstigen sollte, als sie im Stande wären ihre Plätze am Tische zu wechseln, bis sie wieder jeder so wie zuerst zu sitzen kämen. Der Wirth hielt dieß für einen einträglichen Accord, und bewilligte ihn. Wie lange würde dieß Zeit erfordert haben?

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 = 3628800 Mal

könnten die Officiere ihre Plätze wechseln, welches 9941 Jahre, 47 Wochen und 6 Tage dauern würde.

Von den geometrischen Reihen.

§. 251.b.

(No. 63.b.)

Eine geometrische Reihe ist diejenige, bei welcher man immer dieselben Quotienten erhält, wenn man ein folgendes Glied durch sein nächst vorhergehendes dividirt. Z. B.

1, 4, 16, 64 . . . . . .

hier ist $\frac{64}{16} = 4$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{4}{1} = 4 \ldots$

eben so

$$81,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9} \ldots .$$

$$\frac{1}{9} : \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{3};\ \frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{3} : \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3};\ 1 : 3 = \frac{1}{3},\ 3 : 9 = \frac{1}{3} \ldots .$$

Man sieht hieraus, daß zu Fortsetzung einer geometrischen Reihe bloß das erste Glied und der Quotient nöthig sind.

Wäre das erste Glied 2, der Quotient 6, so ist die Reihe

$$2,\ 2.6,\ 2.6.6,\ 2.6.6.6,\ 2.6.6.6.6 \ldots$$

d. i. 2, 12, 72, 432, 2592 . . . .

oder $2,\ 2.6,\ 2.6^2,\ 2.6^3,\ 2.6^4 \ldots .$

Benennen wir nun allgemein das 1ste Glied mit a, den Quotienten mit q, so ist die Reihe

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ aq^5 \ldots .$$

Betrachtet man diese Reihe genau, so ergiebt sich: daß jedes Glied aus dem ersten Gliede a der Reihe besteht, welches mit der so vielsten Potenz von q multiplicirt ist, als dem betreffenden Gliede Glieder vorhergehen.

Das erste Glied $= a = aq^0 = 1 \cdot a = a$, weil ihm kein Glied vorhergeht.

Das zweite Glied $= aq = aq^1$, weil ihm ein Glied vorhergeht.

Das dritte Glied $= aq^2$, weil ihm zwei Glieder vorhergehen.

Eben so ist das 4te Glied aq^3, das 5te aq^4, es wird also auch das 100ste Glied aq^{99} seyn, und deßhalb auch das

$n$te Glied aq^{n-1}.

Benennen wir dieses Glied wieder mit t, so ist

$$t = aq^{n-1}. \qquad \text{I) Hauptformel.}$$

Es besteht also das letzte Glied einer Reihe aus dem ersten Gliede, multiplicirt mit dem Quotienten, zur Anzahl der Glieder weniger eins erhoben.

Um zu dieser Reihe auch eine Summenformel zu haben, verfahre man folgendermaßen:

Es sey die Summe von n Gliedern $= s$, so ist

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots . aq^{n-1} \qquad (A$$

Um die Potenz $n - 1$ wegzuschaffen, multiplicire man die Gleichung mit q, so ist

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots aq^{n-1} + aq^n \qquad (B$$

A. von B. abgezogen

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots . + aq^{n-1}$$
$$- \; - \quad - \quad - \quad - \qquad -$$

$$sq - s = aq^n - a$$

$$s(q-1) = aq^n - a$$

$$\text{C)} \quad s(q-1) = aq^{n-1} \cdot q - a$$

und nun den Werth von aq^{n-1} aus I substituirt, giebt

$$s(q-1) = tq - a \quad \text{woraus}$$

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \qquad \text{II) Hauptformel.}$$

Es besteht demnach die Summe einer jeden geometrischen Reihe aus dem letzten Gliede, multiplicirt mit dem Quotienten, das Product um das erste Glied vermindert und den Rest durch den um 1 verminderten Quotienten dividirt.

Es sey z. B. die Reihe

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . . . .

hier ist $a = 2$, $q = 2$; wollte man nun das 10te Glied dieser Reihe wissen, so ist

$$t = aq^{n-1} = 2 \cdot 2^{10-1} = 2 \cdot 2^9 = 2^{10} = 1024.$$

Sollte nun auch die Summe von 10 Gliedern gefunden werden, so ist

$$s = \frac{1024 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 1023 \cdot 2 = 2046.$$

Anmerkung. Sollte es einem Anfänger auffallen, wo aq^{n-1} in der Reihe B. herkäme, so ist es wohl augenscheinlich, daß, wenn das letzte Glied q^n bei sich hat, das vorletzte q^{n-1} haben muß.

Eben so könnte oben in der Gleichung C. das Glied q^{n-1} auffallen; es ist aber $q^{n-1} \cdot q = q^n$ wie es vorher war, und diese Zerfällung bloß deßhalb vorgenommen, damit $t = aq^{n-1}$ substituirt werden konnte.

§. 252.

(No. 64.)

Aus den Formeln I und II ist ersichtlich, daß in jeder geometrischen Reihe, wie in den arithmetischen, fünf Größen vorkommen; nämlich hier

a das erste Glied, q der Quotient,
n die Anzahl der Glieder,
t das letzte Glied und s die Summe von n Gliedern.

Aus diesen 5 Größen lassen sich ebenfalls 20 Formeln bilden, wo immer 3 Größen gegeben und eine gesucht wird.

Diese Formeln und ihre Entwickelung sind folgende:

A.

t zu suchen.

1) a, q, n gegeben, vermöge I.

$$t = aq^{n-1}$$

2) q, n, s gegeben, aus II entwickelt.

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$sq - s = tq - a$$

$$sq - s + a = tq$$

$$\frac{sq - s + a}{q} = t$$

$$\frac{a + s(q - 1)}{q} = t$$

3) q, n, s gegeben, den Werth von a aus I in II substituirt.

$$t = aq^{n-1}$$

$$\frac{t}{q^{n-1}} = a$$

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$sq - s = tq - \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$sq^n - sq^{n-1} = tq^n - t$$

$$sq^{n-1}(q - 1) = t(q^n - 1)$$

$$\frac{sq^{n-1}(q - 1)}{q^n - 1} = t$$

4) a, n, s gegeben, den Werth von q aus I in II substituirt.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1}$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - s = t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$(s - t)\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$\frac{t}{a}(s - t)^{n-1} = (s - a)^{n-1}$$

$$t(s - t)^{n-1} = a(s - a)^{n-1}$$

$$t(s - t)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0.$$

B.

s zu suchen.

5) a, q, t gegeben, vermöge II.

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

6) a, q, n gegeben, den Werth von t aus I in II substituirt.

$$t = aq^{n-1}$$

$$s = \frac{aq^{n-1} . q - a}{q - 1}$$

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

7) q, n, t gegeben, den Werth von a aus I in II substituirt.

$$a = \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$s = \frac{tq - \frac{t}{q^{n-1}}}{q-1}$$

$$sq - s = tq - \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$sq^n - sq^{n-1} = tq^n - t$$

$$s(q^n - q^{n-1}) = t(q^n - 1)$$

$$s = \frac{t(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$$

8) a, n, t gegeben, den Werth von q aus I in II substituirt.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1}$$

$$s = \frac{\frac{t\sqrt[n-1]{t}}{\sqrt[n-1]{a}} - a}{\frac{\sqrt[n-1]{t}}{\sqrt[n-1]{a}} - 1}$$

$$s = \frac{\frac{t\sqrt[n-1]{t} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{a}}}{\frac{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{a}}}$$

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{t} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}$$

$$s = \frac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$s = \frac{t^{\frac{n-1}{n-1}} \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{n-1}{n-1}} \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

C.

a zu suchen.

9) q, n, t gegeben, aus I.

$$a = \frac{t}{q^{n-1}}$$

10) q, t, s gegeben, aus II.

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$sq - s = tq - a$$

$$a = tq - sq + s$$

$$a = tq - s(q - 1)$$

11) q, n, s gegeben, den Werth von t aus I in II.

$$t = aq^{n-1}$$

$$s = \frac{aq^{n-1} \cdot q - a}{q - 1}$$

$$sq - s = a(q^n - 1)$$

$$\frac{s(q - 1)}{q^n - 1} = a$$

12) n, t, s gegeben, den Werth von q aus I in II substituirt.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1}$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - s = t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$(s - t)\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$(s - t)^{n-1} \cdot \frac{t}{a} = (s - a)^{n-1}$$

$$t(s - t)^{n-1} = a(s - a)^{n-1}$$

$$a(s - a)^{n-1} - t(s - t)^{n-1} = 0$$

D.

q zu suchen.

13) a, n, t gegeben, aus No. I.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

14) a, t, s gegeben, aus No. II.

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

$$sq - s = tq - a$$

$$sq - tq = s - a$$

$$q = \frac{s - a}{s - t}$$

15) a, n, s gegeben, den Werth von t aus I in II substituirt.

$$t = aq^{n-1}$$

$$s = \frac{aq^{n-1} \cdot q - a}{q - 1}$$

$$sq - s = aq^n - a$$

$$sq - aq^n = s - a$$

$$\frac{sq}{a} - q^n = \frac{s - a}{a}$$

$$q^n - q \cdot \frac{s}{a} = - \left[\frac{s - a}{a}\right]$$

$$q^n - q \cdot \frac{s}{a} + \frac{s - a}{a} = 0$$

16) n, t, s gegeben, den Werth von a aus I in II substituirt.

$$a = \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$s = \frac{tq - \frac{t}{q^{n-1}}}{q - 1}$$

$$sq - s = tq - \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$sq^n - sq^{n-1} = tq^n - t$$

$$sq^n - tq^n = sq^{n-1} - t$$

$$q^n (s - t) = sq^{n-1} - t$$

$$q^n = \frac{sq^{n-1}}{s - t} - \frac{t}{s - t}$$

$$q^n - q^{n-1} \cdot \frac{s}{s - t} + \frac{t}{s - t} = 0.$$

E

n zu suchen.

17) a, q, t gegeben aus No. I.

$$t = aq^{n-1}$$

$$\frac{t}{a} = q^{n-1}$$

$$\frac{tq}{a} = q \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{tq}{a} = q^n$$

18) a, t, s gegeben, den Werth von q aus I in II substituirt.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1}$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - s = t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a$$

$$s\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$(s - t)\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = s - a$$

$$\frac{t}{a}(s - t)^{n-1} = (s - a)^{n-1}$$

$$\frac{t}{a} = \left[\frac{s - a}{s - t}\right]^{n-1}$$

19) q, t, s gegeben, den Werth von a aus I in II substituirt.

$$a = \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$s = \frac{tq - \frac{t}{q^{n-1}}}{q-1}$$

$$sq - s = tq - \frac{t}{q^{n-1}}$$

$$sq^n - sq^{n-1} = tq^n - t$$

$$sq^{n+1} - sq^n = tq^{n+1} - tq$$

$$sq^n - sq^{n+1} + tq^{n+1} = tq$$

$$q^n\,(tq - sq + s) = tq$$

$$q^n = \frac{tq}{tq - s(q-1)}$$

20) a, q, s gegeben, den Werth von t aus I in II substituirt.

$$s = \frac{aq^{n-1} \,.\, q - a}{q-1}$$

$$sq - s = aq^n - a$$

$$sq - s + a = aq^n$$

$$\frac{sq - s + a}{a} = q^n$$

$$\frac{s(q-1) + a}{a} = q^n$$

$$\frac{s(q-1)}{a} + 1 = q^n$$

§. 253.

(No. 65.)

In den vorhergehenden Formeln finden sich die No. 4, 12, 15, 16, deren Auflösung dem Anfänger noch nicht erläutert werden kann, da es höhere Gleichungen sind: da solche jedoch zum Ganzen gehören, so sind sie hier in

ihrer Reihe mit aufgestellt, und wird ihre Auflösung in einem eigenen Abschnitte vorgetragen werden.

Ferner sind die Formeln No. 17, 18, 19, 20 solche, wo die unbekannte Größe n als Exponent vorkömmt. Es ist zwar zu Anfange dieses Bandes eine Methode gezeigt worden, wie man unbekannte Exponenten findet, da solche aber etwas mühsam ist, und diese Arbeit durch Logarithmen sehr leicht verrichtet werden kann, und überhaupt bei allen vorhergehenden Formeln, wenn auch nur 6, 7, 8 ... Glieder der Reihe vorkommen, das heißt, wenn $n = 6, 7, 8 \ldots$ ist, die Rechnung sehr beschwerlich wird, so ist es besser, die Lehre von den Logarithmen eher vorzutragen, ehe man zu der Anwendung der geometrischen Reihen schreitet, welches denn im Folgenden geschehen soll.

Die Aufgaben über die geometrischen Reihen, werden zwar meistens durch Logarithmen aufgelös't, doch wollen wir einige hier anführen, welche ohne solche aufgelös't werden können.

Aufgabe 1. Die Volksmenge einer Provinz vermehrte sich jährlich auf gleiche Art und zwar so, daß in 4 Jahren 10000 auf 14641 anwuchsen; um welchen Theil nahm die Bevölkerung zu?

Es sey die Zahl, mit welcher 10000 jährlich multiplicirt wird $= x$, man hat also

am Ende des 1sten	Jahres	$10000x$
— — — 2ten	—	$10000x^2$
— — — 3ten	—	$10000x^3$
— — — 4ten	—	$10000x^4$

Es ist also $10000x^4 = 14641$

$$x^4 = 1{,}4641$$

$$x = \sqrt[4]{1{,}4641} = \sqrt{\sqrt{1{,}4641}}$$

$$= 1{,}1 = \tfrac{11}{10}$$

Da also die Volksmenge am Ende jedes Jahres $\frac{11}{10}$ von der des vorigen beträgt, so wächs't sie um $\frac{1}{10}$.

Probe.	Es waren vorhanden	.	10000
	Hierzu $\frac{1}{10}$ . . .	=	1000
	Am Schlusse des 1sten Jahres		11000
	Hierzu $\frac{1}{10}$ . . .	=	1100
	Am Schlusse des 2ten Jahres		12100
	Hierzu $\frac{1}{10}$ . . .	=	1210
	Am Schlusse des 3ten Jahres		13310
	Hierzu $\frac{1}{10}$ . . .	=	1331
	Am Schlusse des 4ten Jahres		14641

Aufgabe 2. Man hat 7 Zahlen in geometrischer Reihe; wenn man die ersten 6 Glieder addirt, erhält man die Summe $157\frac{1}{2}$, addirt man aber die 6 letzten, so erhält man 315. Welche Zahlen sind es und wie ist der Quotient der Reihe?

Das 1ste Glied der Reihe sey x, der Quotient y, so ist die Reihe x, xy, xy^2, xy^3, xy^4, xy^5, xy^6 und man erhält die Gleichungen

A. $x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 = 157\frac{1}{2}$

B. $xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 = 315$

A mit y multiplicirt giebt

C. $xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 = 157\frac{1}{2}y$

C von B abgezogen giebt

$$315 - 157\tfrac{1}{2}y = 0$$

$$315 = 157\tfrac{1}{2}y$$

$$315 : \tfrac{315}{2} = y \text{ und } y = 2$$

So ist nun $x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 157\frac{1}{2}$

d. i. $126x = 157\frac{1}{2}$

$x = 2\frac{1}{2}$

Und die Reihe $2\frac{1}{2}, 5, 10, 20, 40, 80, 160.$

Aufgabe 3. x, y, z, u, v und w sind die Glieder einer geometrischen Reihe; die Summe der 5 ersten ist 605, die der 5 letzten 1815; wie ist die Reihe?

Hier ist, wenn man den Quotienten $= q$ setzt $x = x,\ y = qx,\ z = q^2x,\ u = q^3x,\ v = q^4x,\ w = q^5x.$

Also

$$x + qx + q^2x + q^3x + q^4x = 605$$ woraus

A. $$x = \frac{605}{1 + q + q^2 + q^3 + q^4}$$

und $$qx + q^2x + q^3x + q^4x + q^5x = 1815$$ woraus

B. $$x = \frac{1815}{q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5}$$ aus A. u. B.

$$\frac{q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5}{1 + q + q^2 + q^3 + q^4} = \frac{1815}{605}$$

d. i. $q = 3$

woraus nun $x = 5$

und die Reihe $5, 15, 45, 135, 405, 1215.$

Neunter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 254.

(No. 66.)

Wenn man eine willkührlich angenommene Zahl nach und nach auf verschiedene Potenzen erhebt, so werden die Exponenten die Logarithmen der hervorgebrachten Potenzen genannt. Z. B.

$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ u. s. w. so ist 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 2 der Logarithmus von 4, 3 der Logarithmus von 8 u. s. w.

Man erhält auf diese Art ein logarithmisches System, wovon 2 die Grundzahl genannt wird.

Betrachten wir nun diese Größen in folgenden Reihen

Exponenten oder Logarithmen	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .
Potenzen	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . .

so wachsen die Logarithmen in einer arithmetischen, und die Potenzen in einer geometrischen Progression gleichförmig fort.

Da man nun auch die Logarithmen oder Exponenten der irrationalen Zahlen gefunden hat, so kann man sagen:

Logarithmen sind eine arithmetische Reihe, welche, wenn man die natürlichen Zahlen als geometrische Reihen betrachtet, mit dieser gleichförmig wachsen.

Oder auch:

die Logarithmen sind von zusammenhängenden Proportionalgliedern gleichförmig zunehmende Begleiter.

Oder auch:

Logarithmen sind Exponenten von Potenzgrößen, für eine bestimmte Wurzel.

§. 255.

(No. 67.)

In dem vorher angenommenen System für die Grundzahl 2, war 2 der Logarithme von 4, $3 = log\ 8$, $4 = log\ 16$ u. s. w. . . . . Nimmt man nun 10 als Grundzahl an, so ist $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ . . . und hier $2 = log\ 100$, $3 = log\ 1000$, $4 = log\ 10000$ . . .

Hieraus ergiebt sich, daß gleiche Logarithmen in verschiedenen Systemen auch zu verschiedenen Zahlen gehören.

Denn in dem System für die Grundzahl 2, ist $2 = log\ 4$, und in dem System für die Grundzahl 10 ist $2 = log\ 100$ u. s. w.

Ferner ist

in jedem Systeme $0 = log\ 1$.

Denn es ist $2^0 = 1$, also $0 = log\ 1$;

es ist aber auch $10^0 = 1$, also auch hier $0 = log\ 1$.

Und wenn auch eine gebrochene Größe als Grundzahl angenommen würde, so bleibt 0 doch noch der Loga-

rithmus von 1. Denn es ist auch $\left[\frac{1}{2}\right]^0 = 1$, und so auch $0 = log\ 1$, wie vorher.

Ferner ist auch in jedem Systeme 1 der Logarithmus der Grundzahl.

Denn es ist $2^1 = 2$, $10^1 = 10$, $\left[\frac{1}{2}\right]^1 = \frac{1}{2}$, folglich $1 = log\ 2$, $1 = log\ 10$, $1 = log\ \frac{1}{2}$ für alle drei verschiedene Systeme.

§. 256.

(No. 68.)

Wäre im Allgemeinen eine Grundzahl $= a$, und $a^m = b$, wo $m = log\ b$; so ist

1) $b > 1$, wenn $a > 1$, und m positiv ist. Denn es sey $a = 2$, so ist, wenn $m = 1$ ist, $2^1 = 2 = b$, also $b > 1$. Eben so wäre es, wenn $a = 1\frac{1}{10} = \frac{11}{10}$, so ist wieder $\left[\frac{11}{10}\right]^1 = \frac{11}{10} = b$, und wieder $b > 1$: und so würde es für jeden positiven Werth von m seyn, wenn die Grundzahl größer als 1 wäre.

2) Wäre aber m eine negative Zahl und $a > 1$, so wird $b < 1$ werden.

Es sey wieder $a = 2$, und $m = -1$, so ist $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = b$; mithin $b < 1$. Eben so wäre es, wenn $a = \frac{11}{10}$, so ist wieder $\left[\frac{11}{10}\right]^{-1} = 1 : \left[\frac{11}{10}\right]^1 = 1 \cdot \frac{10}{11} = \frac{10}{11} = b$ und wieder $b < 1$. Ein Gleiches würde man für jeden negativen Werth für m finden.

Da nun auch $2^{-1} = \frac{1}{2}$, so ist auch $- 1 = \log \frac{1}{2}$, $2^{-2} = 1 : 2^2 = \frac{1}{4}$, und $- 2 = \log \frac{1}{4}$ u. s. w.

Es folgt aus dem Vorigen, daß **in jedem Systeme, wo die Grundzahl > 1 ist, die Logarithmen der Zahlen über 1 positiv und die Logarithmen aller Brüche negativ sind.**

§. 257.
(No. 69.)

Wäre aber bei $a^m = b$ die Grundzahl $a < 1$, so ist

1) $b > 1$, wenn m negativ ist. Es sey die Grundzahl $a = \frac{1}{2}$, so ist, wenn $m = - 1$, $\left[\frac{1}{2}\right]^{-1} = 1 : \left[\frac{1}{2}\right]^1 = 1 : \frac{1}{2} = 1 . \frac{2}{1} = 2$, und deßhalb $- 1 = \log 2$. Es sey $m = - 2$, so ist $\left[\frac{1}{2}\right]^{-2} = 1 : \left[\frac{1}{2}\right]^2 = 1 : \frac{1}{4} = 1 . \frac{4}{1} = 4$, und $- 2 = \log 4$.
2) Ist in demselben Falle $b < 1$, wenn m positiv ist. Es sey wieder $a = \frac{1}{2}$, $m = 1$, so ist $\left[\frac{1}{2}\right]^1 = \frac{1}{2}$, und $1 = \log \frac{1}{2}$, ferner $m = 2$, so ist $\left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$, und $2 = \log \frac{1}{4}$ u. s. w.

Hieraus folgt, daß **in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl < 1 ist, die Logarithmen der eigentlichen Brüche positiv, und die Logarithmen der Zahlen, welche > 1, negativ sind.**

Aus dem Schlusse dieses und des vorigen §. ist zu ersehen, daß es am Beßten ist, zur Grundzahl eines logarithmischen Systems eine positive Zahl anzunehmen, welche die Einheit übersteigt; indem man dadurch für die positiven Zahlen lauter reelle, für die negativen hingegen nur unmögliche Logarithmen erhält.

Da es zuweilen vorkömmt, daß nach dem Logarithmus von Null gefragt wird, so kann man sagen: er ist unendlich groß (∞) aber negativ, wenn die Grundzahl $a > 1$; nämlich für diesen Fall $log\ 0 = -\infty$.

Hingegen ist der Logarithmus von Null unendlich groß und positiv, wenn die Grundzahl $a < 1$ ist; nämlich für diesen Fall

$$log\ 0 = +\infty$$

Ich würde diese Sätze hier nicht angeführt haben, wenn ich nicht erfahren hätte, daß solche nebst ihren Beweisen auch von Leuten gefordert würden, die mit den Reihen und Rechnungen des Unendlichen noch nicht vertraut sind, und werde mich deßhalb bemühen, ohne auf den §. 326 des IV. Bandes hinzudeuten, solche kurz und faßlich zu beweisen.

Es wird wohl Niemand zweifeln, daß wenn man 1 durch eine unendlich große Zahl dividirt, ein jeder der entstehenden Theile für Null zu achten ist: und somit ist also, wenn wir das unendlich Große durch ∞ ausdrücken,

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Da nun erwiesen werden soll, daß $log\ 0 = -\infty$, wenn $a > 1$ ist; so muß auch

$$a^{-\infty} = 0 \text{ seyn. Nun ist}$$

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ und also}$$

$$\underbrace{-\infty = log\ 0}$$

Hier könnte nur noch bezweifelt werden, daß $\frac{1}{a^{\infty}} =$ $= \frac{1}{\infty}$; es ist aber einleuchtend, daß es gleichviel ist, ob man 1 durch eine unendlich große Zahl dividirt, oder durch eine jede andere Zahl, die auf eine unendliche Potenz erhoben ist. Ist also

$a^{\infty} = \infty$, so ist auch $\frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty}$.

Für den zweiten Fall, wenn $a < 1$ ist, ist der Beweis noch einleuchtender; denn hier muß a ein ächter Bruch seyn: wenn man nun einen Bruch auf eine unendliche Potenz erhebt, so wird der Nenner den Zähler unendlich oft übersteigen, und ein solcher Bruch $= 0$ seyn.

Daher $a^{\infty} = 0$
also $\infty = log\ 0$

§. 258.

(No. 70.)

Aus dem Vorhergehenden gehen folgende wesentliche Eigenschaften der Logarithmen hervor. Als

1) Da $2^2 = 4$, und $2^3 = 8$, so ist auch $2^2 \cdot 2^3 =$ $= 4 \cdot 8$, d. i. $2^5 = 32$, mithin $5 = log\ 32$, d. i. $2 + 3 = log\ 32$, oder $log\ 4 + log\ 8 =$ $log\ 32$. Wenn $a^m = b$, $a^n = c$, so ist auch $a^{m+n} = bc$; also $m + n = log\ bc$, d. h. $log\ bc = log\ b + log\ c$.

Es ist also der Logarithmus eines Products gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

Da nun $a^m = b$
und $a^n = c$
woraus $a^{m+n} = bc$ (A.

und $m + n = \log bc$

Wenn nun ferner $a^r = d$

und $a^s = e$

So ist auch $a^{s+r} = de$ (B.

und $s + r = \log de$

Aus A. und B. folgt

$a^{m+n} \cdot a^{s+r} = bc \cdot de$

d. i. $a^{m+n+s+r} = bcde$

Mithin $m + n + s + r = \log bcde$

d. h. $\log bcde = \log b + \log c + \log d + \log e$.

Es gilt also das Obige auch, wenn das Product aus mehr als zwei Factoren besteht.

2) Wenn wieder $a^m = b$ und $a^n = c$, so ist auch $a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{b}{c}$, nämlich $m - n = \log \frac{b}{c}$, d. h. $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$.

Es ist also der Logarithmus eines Quotienten gleich dem Logarithmus des Dividendus, weniger dem Logarithmus des Divisors. Oder: der Logarithmus eines Bruchs ist gleich dem Logarithmus des Zählers, weniger dem Logarithmus des Nenners.

3) Wenn $a^m = b$

so ist auch $(a^m)^r = b$

nämlich $a^{mr} = b^r$

d. i. $mr = \log b^r$

da nun $m = \log b$

so ist auch $r \cdot \log b = \log b^r$

d. i. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Wurzel, multiciplirt mit dem Exponenten der Potenz.

4) Da ferner $a^m = b$

so ist auch $a^{\frac{m}{r}} = b^{\frac{1}{r}}$

nämlich $a^{\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{b}$

also $\frac{m}{r} = \log \sqrt[r]{b}$

und da $m = \log b$

so ist auch $\frac{\log b}{r} = \log \sqrt[r]{b}$

d. i. Der Logarithmus einer Wurzelgröße ist gleich dem Logarithmus der unter der Wurzel stehenden Größe, dividirt durch den Exponenten des Wurzelzeichens.

Es verwandelt sich also durch Rechnung mit Logarithmen die Multiplication in Addition; die Division in Subtraction; die Erhebung zu Potenzen in Multiplication, und die Ausziehung der Wurzeln in Division. Wovon weiter unten ein Mehreres.

§. 259.

(No. 71.)

Das gewöhnliche logarithmische System hat die Grundzahl 10, und wird von dem, der diese Logarithmen zuerst von 1 bis 20000, und dann von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen berechnete, nämlich von Heinrich Brigg, das Briggische, und da es das gewöhnlichste ist, auch das gemeine System genannt. Die fehlenden Logarithmen, von 20000 bis 90000, hat später Adrian Vlacq ausgefüllt.

Außer diesem hat man auch das sogenannte natürliche System, welches auf die Grundzahl 2,7182818 berechnet ist. Warum die, auf diese Grundzahl berechneten,

Logarithmen die natürlichen heißen, kann hier noch nicht erläutert werden.

In dem Briggischen Systeme ist, da $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, $10^5 = 100000$ u. s. w., auch $1 = log\ 10$, $2 = log\ 100$, $3 = 1000$, $4 = log\ 10000$, $5 = log\ 100000$ u. s. w. Eben so ist $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$, $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$ u. s. w. und deßhalb $\frac{1}{2} = log \sqrt{10}$, $\frac{1}{3} = log \sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{4} = log \sqrt[4]{10}$ u. s. w.

Man sieht hieraus, daß die Logarithmen der rationalen Potenzen der Grundzahl ganze rationale Zahlen, und die Logarithmen der irrationalen Potenzen der Grundzahl rationale Brüche seyn müssen, wie es aus dem Vorigen oder der nachstehenden Tabelle erhellt.

da	so ist auch	da	so ist auch
$10^0 = 1$	$0 = log\ 1$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$	$\frac{1}{2} = log \sqrt{10}$
$10^1 = 10$	$1 = log\ 10$	$10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$	$\frac{\ }{3} = log \sqrt[3]{10}$
$10^2 = 100$	$2 = log\ 100$	$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$	$\frac{1}{4} = log \sqrt[4]{10}$
$10^3 = 1000$	$3 = log\ 1000$	$10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$	$\frac{1}{5} = log \sqrt[5]{10}$
$10^4 = 10000$	$4 = log\ 10000$	$10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$	$\frac{1}{6} = log \sqrt[6]{10}$
$10^5 = 100000$	$5 = log\ 100000$	$10^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{10}$	$\frac{1}{7} = log \sqrt[7]{10}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Man findet aber auch, daß die Logarithmen aller übrigen Zahlen weder irrational noch rational seyn können: da es z. B. unmöglich ist, die Zahl 10 zu irgend einer Potenz zu erheben, die genau 2, 3, 4, 5 . . . ist.

Solche Zahlen, welche weder rational noch irrational sind, nennt man transcendent.

So ist z. B. der Exponent von 10, wenn die Zahl 2 herauskommen soll, 0,30103 . . . ., nämlich

$10^{0,30103}$ . . . = 2, und 0,30103 . . . = *log* 2.

Eben so

$10^{0,4771213}$ = 3, und 0,4771213 = *log* 3
u. s. w. u. s. w.

§. 260.

(No. 72.)

Aus dem jenseits aufgeführten Täfelchen findet sich aber auch, daß alle Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, nämlich die Logarithmen von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, größer als 0, und kleiner als 1 seyen, und deßhalb aus 0 Ganzen und einem angehängten Decimalbruche bestehen müssen. Eben so müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100, nämlich von 11 bis mit 99, größer als 1, und kleiner als 2, also aus 1 mit einem angehängten Decimalbruche, bestehen. Die Logarithmen der Zahlen, so über 100, und kleiner als 1000, müssen aus eben dem Grunde aus 2 mit einem angehängten Decimalbruche, die Logarithmen der Zahlen, so über 1000, und unter 10000, aus 3 mit einem Decimalbruche u. s. w. bestehen; so daß überhaupt der Logarithmus einer jeden ganzen Zahl aus so viel ganzen Einheiten, als die Zahl Ziffern hat, weniger 1 besteht.

So besteht

der Logarithmus von	377	aus 2 u.	einem Decimalbruch	
— — — —	4723	— 3 —	— — —	
— — — —	67231	— 4 —	— — —	
— — — —	581323	— 5 —	— — —	

Je mehr solcher Decimalstellen bei den Logarithmen bestimmt sind, je näher kommen sie, als Exponenten betrachtet, der Wahrheit. Gewöhnlich sind die Logarithmen mit 7 Decimalstellen berechnet, welches für gewöhnliche Rechnungen hinlänglich genau ist.

Die Ganzen des Logarithmus werden, weil man aus solchen sogleich ersieht, aus wie viel Ziffern die zugehörige Zahl besteht, die Kennziffer, oder Charakteristik genannt. Denn wenn die gegebene Zahl aus n Ziffern besteht, so hat ihr Logarithmus ($n - 1$) Einheiten zur Kennziffer. Die angehängten Decimalziffern werden die Mantisse genannt.

Auch haben die Briggischen Logarithmen den Vortheil, daß der Logarithmus einer Zahl, welche hinten Nullen bei sich führt, dem Logarithmus der Zahl ohne Nullen in seiner Mantisse völlig gleich, und nur in der Kennziffer verschieden ist.

So ist z. B. $log\ 3498 = 3,5438198$
und $log\ 3498000 = 6,5438198$
$log\ 349800000 = 8,5438198$

Denn es ist $log\ 3498000 = log\ (3498 \,.\, 1000) =$
$= log\ 3498 + log\ 1000 = 3,5438198 + 3 =$
$= 6,5438198.$

Eben so ist $log\ 349800000 = log\ (3498 \,.\, 100000) =$
$= log\ 3498 + log\ 100000 = 3\ 5438198 + 5 =$
$= 8,5438198.$

Ingleichen ist $log\ 62949 = 4{,}7989888$
und $log\ 6294{,}9 = 3{,}7989888$
$log\ 629{,}49 = 2{,}7989888$
$log\ 62{,}949 = 1{,}7989888$
$log\ 6{,}2949 = 0{,}7989888$

Denn es ist $log\ 6294{,}9 = log\ \frac{62949}{10} =$
$= log\ 62949 - log\ 10 = 4{,}7989888 - 1 =$
$= 3{,}7989888.$

Eben so $log\ 6{,}2949 = log\ \frac{62949}{10000} =$
$= log\ 62949 - log\ 10000 = 4{,}7989888 - 4 =$
$= 0{,}7989888.$

§. 261.
(No. 73.)

Die Art und Weise, wie zuerst Brigg sehr mühsam die Logarithmen berechnete, will ich hier nicht weitläuftig aufführen, sondern nur erwähnen, daß es im Ganzen, durch Aufsuchen mittlerer Proportionalen zwischen den Exponenten geschehen ist. Z. B. um den Logarithmus von 5 zu finden, d. h. 10 auf eine Potenz zu erheben, die ziemlich genau 5 ist, suchte man zuerst zwischen 10^0 und 10^1 eine mittlere Proportionale, und fand $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16227766001$, ferner zwischen $10^{\frac{1}{2}}$ und 10^1 eine mittlere Proportionale $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = 5{,}623413251$, eben so zwischen $10^{\frac{3}{4}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$ die mittlere Proportionale $10^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{10^5} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{100000}}} = 4{,}216965034$, und so fuhr man fort, bis man zuletzt $10^{\frac{2931693}{4194304}} = \sqrt[4194304]{10^{2931693}} = 5{,}000000864 \ldots$ fand; da nun also $10^{\frac{2931693}{4194304}} = 5$ ziemlich genau, so ist auch $\frac{2931693}{4194304} = 0{,}6989700 = log\ 5$.

Man sieht hieraus nicht allein, wie mühsam diese Berechnungen waren, sondern findet auch, daß es, wenn man einmal so weit gekommen, es nun nicht mehr schwierig war, noch mehr als 7 Decimalstellen zu entwickeln.

§. 262.

(No. 74.)

Es giebt sehr viele logarithmische Tafeln, jedoch sind zum gewöhnlichsten Gebrauch wohl die kleineren Vega'schen, unter dem Titel: Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch u. s. w. Leipzig, in der Weidmannschen Buchhandlung, vorzüglich zu empfehlen. Sie geben die Logarithmen von 1 bis 101000, und enthalten außerdem auch die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten zum Gebrauch für trigonometrische Berechnungen. Außerdem haben diese Logarithmen den wesentlichen und für den Anfänger so unentbehrlichen Vortheil, daß in der Einleitung der Gebrauch der Tafeln sehr genau und deutlich erläutert ist: außerdem ist auch die Herleitung der Logarithmen durch die Lehre von den unendlichen Reihen in derselben Einleitung sehr faßlich vorgetragen.

Nicht minder zu empfehlen sind: Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer, zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln (2 Theile.) Berlin 1778, bei Mylius.

Der erste Band dieses schätzbaren Werks enthält ebenfalls die Briggischen Logarithmen von 1 bis 101000; außerdem die natürlichen Logarithmen von 1 bis 10000 mit 48 Decimalziffern, und noch die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 0 Grad bis 2 Grad von Secunde zu Secunde. Der 2te Band enthält nicht allein die gewöhnlichen Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tan-

genten und Cotangenten für den Halbmesser 10000000000, sondern auch ihre natürlichen Längen für den Halbmesser = 1, und die zugehörigen sogenannten hyperbolischen Logarithmen: und außerdem noch eine Menge nützlicher und unentbehrlicher Tafeln.

Außerdem sind noch zu empfehlen die größeren Vega'schen Tafeln in 2 Bänden, und dessen Thesaurus logarithmorum für ganz feine mathematische Berechnungen.

Es giebt nun wohl noch eine Menge logarithmischer Tafeln, die aber größtentheils die Logarithmen nur von 1 bis 10000 enthalten, und deßhalb weit hinter den oben genannten zurückstehen müssen, indem man erst immer eine Berechnung anstellen muß, wenn man einen Logarithmus für eine Zahl, die 10000 übersteigt, verlangt, wie es aus dem Folgenden ersichtlich seyn wird.

§. 263.

(No. 75.)

Vergleicht man die Logarithmen mehrerer aufeinanderfolgenden Zahlen, so macht man folgende Bemerkungen:

1) Daß die Differenzen einander immer mehr gleichen, je größer die zugehörigen Zahlen werden.

2) Daß, wenn die Zahlen schon größer, als 1000 sind, die Differenzen nur noch in der 7ten Decimalziffer um einige Einheiten differiren.

3) Daß, wenn die Zahlen sich schon 10000 nähern, der Unterschied in der 7ten Decimalziffer nicht mehr zu bemerken ist.

4) Daß dieses auch schon bei Zahlen, die nur 1000 übersteigen, der Fall ist, wenn sie um keine ganze Einheit verschieden sind.

Beispiel ad 2.

1001 Logarithmus davon 3,0004341
1002 — — — 3,0008677
1003 — — — 3,0013009

Nun ist

3,0013009 — 3,0008677 = 0,0004332
3,0008677 — 3,0004341 = 0,0004336

Und nun

0,0004336 — 0,0004332 = 0,0000004

Also die Differenzen dieser 3 Zahlen nur in der 7ten Decimalstelle um 4 Einheiten verschieden.

Beispiel ad 3.

9988 Logarithmus davon 3,9994785
9989 — — — 3,9995220
9990 — — — 3,9995655
3,9995655 — 3,9995220 = 0,0000435
3,9995220 — 3,9994785 = 0,0000435

wo keine Differenz Statt findet.

Beispiel ad 4.

1001 Logarithmus davon 3,0004341
$1001\frac{1}{2}$ — — — 3,0006509
1002 — — — 3,0008677
3,0008677 — 3,0006509 = 0,0002168
3,0006509 — 3,0004341 = 0,0002168

wo ebenfalls keine Differenz Statt findet.

Aus Vorigem läßt sich nun der Satz herleiten, daß: Bei Zahlen größer als 1000, und um keine ganze Einheit verschieden, die Differenzen der Zahlen sich gegeneinander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Logarithmen.

Denn es ist aus Beispiel 4

$$(1002 - 1001):(1001{,}5 - 1001) = (log\ 1002 - log\ 1001): : (log\ 1001\tfrac{1}{2} - log\ 1001)$$ nämlich

$$1 : \tfrac{1}{2} = (3{,}0008677 - 3{,}0004341) : (3{,}0006510 - 3{,}0004341)$$

$$1 : \tfrac{1}{2} = 0{,}0004336 : 0{,}0002169.$$

§. 264.

(No. 76.)

Durch die vorhergehende Proportion ist man nun im Stande, den Logarithmus einer Zahl zu finden, welche größer ist, als die Tafel sie angiebt. Z. B.

Die Tafel giebt die Logarithmen bis 10000 an, und man soll den Logarithmus von 7823368 finden; so wird man den Logarithmus von 7823 in den Tafeln finden, man schneide deßhalb durch ein Komma so viel Ziffern als Decimalziffern ab, damit man die Ganzen in der Tafel findet, d. i. man suche Logarithmus 7823,368.

Nun suche man

$$\begin{array}{rl} & log : 7824 = 3{,}8934288 \\ \text{und} & log : 7823 = 3{,}8933733 \\ \hline \text{So ist ihre Differenz} & 0{,}0000555. \end{array}$$

So ist nun nach vorigem §.

$$(7824 - 7823) : (7823{,}368 - 7823) = (log\ 7824 - log\ 7823) : x$$

wenn wir den dem nächst kleineren Logarithmus zuzuaddirenden Proportionaltheil mit x benennen. Also nun

$$1 : 0{,}368 = 555 : x$$

die beiden ersten Glieder mit 1000 multiplicirt, giebt

$$1000 : 368 = 555 : x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{368 \cdot 555}{1000} = \frac{204240}{1000} = 204{,}24$$

Es ist also $log\ 7823{,}368 = 3{,}8933733 + 0{,}0000204 = 3{,}8933937$

Also $log\ 7823368 = 6{,}8933937$

sucht man log 7823368 in den Tafeln von Vega, Schulz u. s. w., so findet man dasselbe wie oben. Nämlich

A. Wegen d. 5 ersten Ziffern $log\ 78233 = {}^*,8933900$
Proport. Theil wegen der 6ten Ziffer 6 = 33 |
Proport. Theil wegen der 7ten Ziffer 8 = 4 | 4

$log\ 7823368 = 6,8933937$

da die 8te Ziffer weggelassen und der Logarithmus nur mit 7 Decimalziffern berechnet wird.

2tes Beispiel.

In einer Tafel, welche die Logarithmen der Zahlen bis 10000 angiebt, soll der Logarithmus von 1789957 gefunden werden. So schneide man wieder wie oben ab, und suche

$$log\ 1789,957.$$

Man suche

$$log\ 1790 = 3,2528530$$
$$log\ 1789 = 3,2526103$$

So ist ihre Differenz $= 0,0002427$

So ist nun

$$(1790 - 1789) : (1789,957 - 1789) =$$
$$= (log\ 1790 - log\ 1789) : x$$

$$1 : 0,957 = 2427 : x$$

$$1000 : 957 = 2427 : x$$

$$x = \frac{2427 \cdot 957}{1000} = 2322,639$$

$x = 2323$, wenn man die letzte Ziffer wegen der ersten weggeworfenen um eine Einheit vermehrt.

Mithin $log\ 1789,957 = 3,2526103 + 2323 =$
$= 3,2528426$

Also $log\ 1789957 = 6,2528426.$

Sucht man diesen Logarithmus nach den Vega'schen Tafeln, so ist

wegen der ersten 5 Ziffern $log\ 17899 = {}^*,2528288$ B.
Proport. Theil wegen d. 6ten Ziffer = 121 |
Proport. Theil wegen d. 7ten Ziffer = 16 | 9

$log\ 1789957 = 6,2528426$

wenn auch hier die 7te Ziffer wegen der folgenden 9 um eine Einheit vermehrt wird.

Das hierdurch gefundene Verfahren läßt sich durch folgende Regel ausdrücken.

Eine Einheit mit so viel angehängten Nullen, als Ziffern abgeschnitten worden, verhält sich zu den abgeschnittenen Ziffern, wie die Differenz des nächst größeren und nächst kleineren Logarithmus der Tafel, zur Differenz des nächst kleineren und des gesuchten Logarithmus.

Die gefundene Zahl wird sodann den letzten Decimalziffern des nächst kleineren Logarithmus zu addirt.

Die Beispiele A. und B. zeigen deutlich, daß dieses Verfahren in den besseren logarithmischen Tafeln ganz entbehrt wird, und man kürzer zum Zweck gereicht, weil z. B. in A. die Proportionaltheile 33 und 44, und in B. 121 und 169 sich dort schon berechnet finden.

Anmerk. Anfänger thun wohl, sich mit der Art, die Logarithmen zu finden, wenn die Tafeln nicht weiter, als 10000 reichen, recht vertraut zu machen, da bei öffentlichen Prüfungen öfters nur solche Tafeln zum Gebrauch gestattet werden; z. B. bei den Prüfungen zu Officiers in den Preuß. Staaten, sind nur die Grüson'schen Logarithmen erlaubt.

§. 265.

(No. 77.)

Wollte man nach dem vorhergehenden §. den Logarithmus einer aus 8 Ziffern bestehenden Zahl suchen, so ergiebt es sich, daß der 8ten Ziffer wegen, der Logarithmus in der 7ten Decimalstelle höchstens um 4 Einheiten wächst; und dieses nur in dem Falle, wenn die erste Ziffer 1, und die letzte 9 ist.

Man suche z. B. den Logarithmus von 17654329.

So ist 1765|4329 zu suchen; also nach der Regel des vorigen §.

$$10000 : 4329 = (log\ 1766 - log\ 1765) : x$$

$$10000 : 4329 = (3{,}2469907 - 3{,}2467447) : x$$

$$10000 : 4329 = 2460 : x$$

$$1000 : 4329 = 246 : x$$

$$x = \frac{246 \cdot 4329}{1000} = \frac{1064934}{1000}$$

$$= 1064{,}934.$$

Nun ist *log* 1765 = *,2467447
gefundener Prop. Theil = 1064

Logarithm. 17654329 = 7,2468511

Suchen wir auf ähnliche Art den *log* 1765432, so ist dieser = 6,2468509. Folglich in der letzten Decimalziffer nur um 2 Einheiten von voriger verschieden.

Nach den bessern Tafeln gesucht, ist

log 17654 =	*,2468431	
Proport. Theil wegen d. 6ten Ziffer 3	74	
Proport. Theil wegen d. 7ten Ziffer 2	4	9
Proport. Theil wegen d. 8ten Ziffer 9	2	21
log 17654329 =	7,2468511	

wie vorher

und ohne den Proport. Theil 221 für die 8te Ziffer 9,

log 1765432 = 6,2468509

wie oben.

Bei allen übrigen Fällen aber, wo sich eine 8zifferige Zahl nicht mit 1 anfängt und mit 9 endigt, ist der Logarithmus der 8zifferigen Zahl von der einer 7zifferigen, in der 7ten Decimalziffer höchstens um eine Einheit verschieden, oder vollkommen gleich.

Es sey z. B. der Logarithmus von 6875328 und der von 68753287 auf diese Art zu vergleichen. So ist nach den besseren Tafeln

$$\begin{array}{lr|l} & log\ 6875328 = 6{,}8372917 & \\ \text{Proport. Theil wegen d. 6ten Ziffer 2} & 13 & \\ \text{Proport. Theil wegen d. 7ten Ziffer 8} & 5 & 0 \\ \hline & log\ 6875328 = 6{,}8372935 & \end{array}$$

Wollte man hier für die 8te Ziffer 7 noch den Prop. Theil 44 zusetzen, so würde solcher unter die 5|0 gesetzt.

|44

5|44

Folglich würden die 7 Decimalziffern des Logarithmus nicht verändert. Mithin

log 68753237 = 7,8372935

Es folgt daraus, daß, wenn nach einer Tafel, welche die Logarithmen nicht so weit angiebt, der Logarithmus einer Zahl von 8 Ziffern gesucht werden soll, man ihn nur für die ersten 7 Ziffern sucht, und die Kennziffer für 8 Ziffern einrichtet.

Hätte die Zahl noch mehr als 8 Ziffern, so gilt das Vorige um so mehr, und es wird bloß die Kennziffer berücksichtigt und zu den ersten 7 Ziffern der Logarithmus gesucht.

So ist *log* 23289427 = 7,3671588
und *log* 2328942735 = 9,3671588 u. s. w.

Hat aber eine Zahl hinten Nullen, so suche man nur zu den geltenden Ziffern den Logarithmus, und richte die Kennziffer ein.

So ist, z. B. *log* 55999 = 4,7481803
und *log* 559990000 = 8,7481803.

§. 266.

(No. 78.)

Durch den im 264 §. Nro. 76 angeführten Satz, läßt sich nun auch zu einem gegebenen Logarithmus, der nicht in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl finden.

Z. B. es ist der Logarithmus *,8933937 gegeben, und man soll die zugehörige Zahl finden.

Die Kennziffer braucht hier nicht berücksichtigt zu werden, weil diese bekanntlich nur die Anzahl der ganzen Ziffern der zugehörigen Zahl angiebt.

So suche man den nächst kleineren und nächst größeren Logarithmus in der Tafel.

Hier ist

A) der nächst größere Log. $*,8933955 = log\, 78234$
B) der gegebene Log. $*,8933937 = log\, 78233 + x$
C) der nächst kleinere Log. $*,8933900 = log\, 78233$

wo x die abgeschnittenen Ziffern bedeutet.

Nun ist Differenz $A - C = 55$
Differenz $B - C = 37$.

Also ist nach §. 264. No. 76, $100 : x = 55 : 37$
oder $55 : 37 = 100 : x$.

Da hier 100 in das erste Glied der Proportion gesetzt ist, so sagt dieses, daß x nur aus 2 Ziffern bestehen soll, welches auch schon deßhalb klar ist, weil der nächst kleinere und nächst größere Logarithmus für Zahlen von 5 Ziffern gesucht werden, folglich nur noch 2 Ziffern fehlen, da die 8te nach den vorigen §. hier keine Aenderung verursacht.

Es ist also hier

$$x = \frac{100 \,.\, 37}{55} = \frac{3700}{55} = 67 \;.\;.\;.\;.\;.$$

welche beiden Zahlen, nun der, für den nächst kleineren Logarithmus gefundenen Zahl hinten angehängt werden.

So ist also

$*,8933937 = log\, 78233|67$

wo nun bloß nach der vorhandenen Kennziffer die Ganzen abgeschnitten werden.

So wäre z. B.

$4,8933937 = log\, 78233,67$
$5,8933937 = log\, 782336,7$ u. s. w.

Sucht man nach den besseren Tafeln die zu dem Logarithmus 4,8933937 gehörige Zahl, so ist

	4,8933937 = *log*	78233 . .	
nächst kleine	3900		
Rest	37 wozu		6.
Differenz in d. Tafel	33		
Rest	40 wozu		7

also 4,8933937 = *log* 78233,67, wie oben.

Ist die Kennziffer größer als 6, so besteht die Zahl aus mehr als 7 Ziffern. Da sich aber die 8te Ziffer nicht mehr bestimmen läßt, weil die Logarithmen zweier Zahlen, die aus 8 Ziffern bestehen, und nur in einigen Einheiten verschieden sind, die 7 ersten Decimalziffern vollkommen gleich haben; so hänge man hinten noch so viele Nullen an, damit man die der Kennziffer entsprechende Anzahl der Ziffern erhält.

§. 267.

(No. 79.)

Da, wie schon oben erwähnt worden ist, in der Einleitung der kleinen Vega'schen Tafeln der Gebrauch derselben sehr deutlich erläutert worden ist, so verweise ich Jeden, der damit rechnen will, auf solche, und führe deßhalb keine Beispiele an, wie Logarithmen zu Zahlen, und Zahlen zu Logarithmen gesucht werden. Im Allgemeinen möchten aber doch nachstehende Beispiele für Anfänger noch nöthig seyn, welche nicht sowohl das Aufsuchen, als die Behandlung der Logarithmen selbst betreffen.

Wenn zu einer ganzen Zahl mit einem angehängten Bruche der Logarithmus gesucht werden soll, so verwandele man die Ganzen in einen Afterbruch, addire den Zähler des Bruchs hinzu, und ziehe sodann den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers ab.

Z. B. $log\ 2\frac{9}{10} = log\ \frac{29}{10} =$

$log\ 29 - log\ 10 =$

$1,4623980 - 1,0000000$

$0,4623980 = log\ 2,9.$

Hier ergiebt sich aus dem Resultate schon, daß die Bearbeitung richtig ist.

$$log\ 16\frac{97}{100} = log\ \frac{1697}{100} =$$
$$log\ 1697 - log\ 100 =$$
$$3,2296818 - 2,0000000 =$$
$$1,2296818 = log\ 16,97.$$

Es sind hier absichtlich Brüche gewählt, welche zehntheilige Nenner haben, damit das Resultat mit dem Gegebenen völlig gleichlautend erscheint.

Soll zu einem ächten Bruche der Logarithmus gesucht werden, so ziehe man ebenfalls den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers ab. Z. B.

$$log\ \frac{7}{8} = log\ 7 - log\ 8$$
$$= 0,8450980 - 0,9030900$$

Wenn diese Subtraction wirklich verrichtet werden sollte, so müßte man die kleinere Zahl von der größeren abziehen, und erhielte dadurch einen negativen Logarithmus.

Um jedoch solche negative Logarithmen zu vermeiden, verfahre man folgendermaaßen:

Man vermehre die Kennziffer des Minuendus um so viel Einheiten, daß der Subtrahendus abgezogen werden kann; setze aber dieselbe Anzahl Einheiten mit dem Zeichen minus hinter solchen an.

So ist im vorigen Beispiele

$$\left.\begin{array}{r} 0,8450980 \\ -\ 0,9030900 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 1,8450980\ -\ 1 \\ -\ 0,9030900 \\ \hline 0,9420080\ -\ 1 = \end{array}$$
$$= log\ 0,875.$$

Es ist aber auch $\frac{7}{8} = 0{,}875$, folglich die Auflösung richtig.

Der folgende §. wird zeigen, wie zu solchen Logarithmen die zugehörige Zahl gefunden wird.

Soll zu einem Decimalbruch, welcher Ganze bei sich führt, der Logarithmus gesucht werden, so suche man solchen, als wenn die Ziffern lauter ganze Zahlen wären, und vermindere sodann die Kennziffern um so viele Einheiten, als Decimalstellen vorhanden waren. Z. B.

Es soll zu 232,89427 der Logarithmus gesucht werden: so ist

$$log\ 23289427 = 7{,}3671588.$$ Also
$$log\ 232{,}89427 = 2{,}3671588$$ und auch
$$log\ 23{,}289427 = 1{,}3671588$$ und endlich
$$log\ 2{,}3289427 = 0{,}3671588.$$

Ist aber der Decimalbruch ohne Ganze, und die Anzahl der Decimalziffern daher größer, als die Kennziffer, so ziehe man so viele Einheiten davon ab, daß sie Null werde, und die noch abzuziehenden hänge man mit dem Zeichen minus hinten an. Z. B.

Es soll für 0,4332 der zugehörige Logarithmus gesucht werden, so ist

$$log\ 4332 = 3{,}6366884.$$

Da nun der gegebene Decimalbruch 4 Decimalstellen hat, so sollen nach voriger Regel auch 4 Einheiten von der Kennziffer abgezogen werden, da solche aber nur 3 hat, so muß eine mit Minus hinten angehängt werden.

Nämlich es ist

$$log\ 0{,}4332 = 3{,}6366884 - 4$$
$$= 0{,}6366884 - 1.$$

Deutlich kann man sich dieses Verfahren auf folgende Art machen.

$$\log 0{,}4332 = \log \frac{4332}{10000} =$$

$$\log 4332 - \log 10000 =$$

$$3{,}6366884 - 4{,}0000000 =$$

$$4{,}6366884 - 1$$

$$- 4{,}0000000$$

$\log 0{,}4332 = 0{,}6366884 - 1$ wie vorher.

§. 268.

(No. 80.)

Wenn zu einem Logarithmus, dessen Kennziffer 0 ist, bei welchem hinten noch negative Einheiten angehängt sind, die Zahl zu suchen ist; so setze man der Zahl, welche zu der Mantisse des Logarithmus gehört, so viele Nullen vor, als hinten negative Einheiten angehängt sind; wo jedoch eine davon für die Ganzen abgeschnitten werden muß. Z. B. Es soll zu dem Logarithmus 0,8325781 — 2 die zugehörige Zahl gesucht werden, so ist

$$*{,}8325781 = \log 6801083$$

und $*{,}8325781 - 2 = \log 006801083$

endlich $0{,}8325781 - 2 = \log 0{,}06801083$.

Eben so ist

$$*{,}6225210 = \log 4192963$$

und $*{,}6225210 - 3 = \log 0004192963$

endlich $0{,}6225210 - 3 = \log 0{,}004192963$.

Wenn man den Logarithmus zu einem ächten Bruch nach der Regel des vorigen §. sucht, und solchen nicht, wie dort gezeigt worden, positiv macht, so erhält man einen negativen Logarithmus; wenn nun zu so einem negativen Logarithmus die zugehörige Zahl gesucht werden soll, so verfahre man folgendergestalt.

Entweder:

Man mache die Decimalziffern des Logarithmus positiv, und verfahre wie bei den oben gegebenen Beispielen,

d. h. man ziehe den gegebenen Logarithmus von so viel positiven Einheiten ab, als hiezu nöthig sind, hänge solche aber mit Minus wieder hinten an, und suche sodann die Zahl wie vorher. Z. B.

— 1,7390182 sey ein solcher gegebener negativer Logarithmus, so ist

$$-1{,}7390182 = (2{,}0000000 - 2) - 1{,}7390182$$
$$= 0{,}2609818 - 2 = \log 0{,}0182382$$

Oder:

Man suche die Zahl zu dem Logarithmus, als wenn solcher positiv wäre, und mache solche zum Nenner eines Bruchs, dessen Zähler 1 ist.

So ist

$$1{,}7390182 = \log 54{,}83.$$

Also

$$-1{,}7390182 = \log \frac{1}{54{,}83}$$

$$= \log \frac{1{,}00}{54{,}83} = \frac{100}{5483} = 0{,}0182382$$

wie oben.

§. 269.

(No. 81.)

Aus dem früher Gesagten ist bereits bekannt, welche Erleichterung die Rechnung mit Logarithmen verschafft, und ich werde über diese Fälle in Folgendem einige Beispiele geben. Es wird

1) jede Multiplication in Addition, und jede Division in Subtraction verwandelt. Z. B.

$$x = \frac{2008 \,.\, 3{,}14 \,.\, 57868}{250 \,.\, 27{,}234}$$

So ist

$$\log x = \log 2008 + \log 3{,}14$$
$$+ \log 57868 - \log 250$$
$$- \log 27{,}234.$$

Nämlich

log des *Dividendus.*	log des *Divisor.*
$\log 2008 = 3,3027637$	$\log 250 = 2,3979400$
$+ \log 3,14 = 0,4969296$	$+ \log 27,234 = 1,4351114$
$+ \log 57868 = 4,7624385$	$\log Divisor = 3,8330514$
$\log Dividend. = 8,5621318$	

$$\begin{array}{lr} \log Dividend. & 8,5621318 \\ - \log Divisor & 3,8330514 \\ \hline \log x = & 4,7290804 \end{array}$$

wozu nun die zugehörige Zahl gesucht wird.

2) Jede Erhebung zu Potenzen wird in Multiplication verändert. Z. B.

$$\left[\frac{20119}{272134}\right]^5 = x$$

So ist

$$\log x = \log \left[\frac{20119}{272134}\right]^5$$

$$= 5 \log 20119 - 5 \log 272134$$

$$\begin{array}{r} \log 20119 = 4,3036064 \\ 5 \\ \hline 5 \log 20119 = 21,5180320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 272134 = 5,4347828 \\ 5 \\ \hline 5 \log 272134 = 27,1739140 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log x = 21,5180320 = & 27,5180320 - 6 \\ - 27,1739140 = & 27,1739140 \\ \hline \log x = & 0,3441180 - 6 \end{array}$$

und $0,3441180 = \log 2208605$

$0,3441180 - 6 = \log 0,000002208605.$

3) Die Ausziehung einer Wurzel wird in Division verwandelt. Z. B.

$x = \sqrt[5]{3^8}$ so ist

$$\log x = \log \sqrt[5]{3^8}$$

$$\log x = \frac{\log 3^8}{5} = \frac{8 \log 3}{5}$$

$$= \frac{8 \cdot 0{,}4771213}{5}$$

$$= \frac{3{,}8169704}{5} = 0{,}7633941$$

$$= \log 5{,}799547 = \log \sqrt[5]{3^8}$$

Ferner $x = \sqrt[\frac{3}{4}]{6^{\frac{3}{5}}}$ so ist auch

$$\log x = \log \sqrt[\frac{3}{4}]{6^{\frac{3}{5}}} = \frac{3}{5} \cdot \log 6 : \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3 \log 6 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{4 \log 6}{5}$$

$$= \frac{4 \cdot 0{,}7781513}{5} = \frac{3{,}1126052}{5}$$

$$= 0{,}6225210 = \log 4{,}192963$$

$$= \log \sqrt[\frac{3}{4}]{6^{\frac{3}{5}}}$$

Das vorige Beispiel kann auch auf folgende Art behandelt werden.

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{6^{\frac{3}{5}}} = 6^{\frac{3}{5} : \frac{3}{4}} = 6^{\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}} = 6^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{6^4}$$

und nun $\log x = \frac{4 \log 6}{5}$ wie oben.

$$x = \sqrt[\frac{5}{7}]{\left[\frac{9}{11}\right]^2}$$

$$\log x = \log \sqrt[\frac{5}{7}]{\left[\frac{9}{11}\right]^2} = \left[2 \log \frac{9}{11}\right] : \frac{5}{7}$$

$$= (2 \log 9 - 2 \log 11) : \frac{5}{7} =$$

$$= (2 \log 9 - 2 \log 11) \cdot \frac{7}{5}$$

$$= \frac{14 \log 9 - 14 \log 11}{5}$$

$$\log 9 = 0{,}9542425$$
$$14$$
$$38169700$$
$$9542425$$
$$14 \log 9 = 13{,}3593950$$

$$\log 11 = 1{,}0413927$$
$$14$$
$$41655708$$
$$10413927$$
$$14 \log 11 = 14{,}5794978$$

$$14 \log 9 = 13{,}3593950 = 15{,}3593950 - 2$$
$$- 14 \log 11 = 14{,}5794978$$
$$14 \log 9 - 14 \log 11 = 0{,}7798972 - 2.$$

Dieser gefundene Logarithmus muß nun noch mit 5 dividirt werden; um nun in solchen Fällen auch die negativen Einheiten dividiren zu können, müssen solche so eingerichtet werden, daß die Division aufgeht: man setzt deßhalb dieser Einheit so viel zu, daß der Divisor darin aufgeht, und vermehrt eben deßwegen die Kennziffer um eben so viel, damit der Werth nicht verändert werde. So ist hier

$$\frac{0{,}7798972 - 2}{5} = \frac{3{,}7798972 - 5}{5} =$$
$$= 0{,}7559794 - 1.$$

Nun ist $*{,}7559794 = \log 5701373$

und $0{,}7559794 - 1 = \log 0{,}5701373.$

§. 270.

(No. 82.)

Bevor ich zu dem wahren Gebrauch der Logarithmen übergehe, muß ich noch der sogenannten dekadischen

Ergänzung erwähnen. Man bedient sich ihrer mit Vortheil, wenn mehrere Logarithmen zu addiren und zu subtrahiren sind, wo man statt der zu subtrahirenden Logarithmen ihre dekadische Ergänzung addirt.

Man schreibt in diesem Falle die zu addirenden Logarithmen unter einander, und unter solche die dekadischen Ergänzungen der abzuziehenden, und hängt hinter jeder dekadischen Ergänzung (— 10) an, und addirt Alles; gleicht aber am Ende die negativen Einheiten mit der Kennziffer aus.

Die dekadische Ergänzung wird gefunden, wenn man, von der Kennziffer des Logarithmus angefangen, jede Ziffer von 9, und die letzte von 10 abzieht.

Ich werde es zuerst an ganz leichten Beispielen zeigen, um den Anfängern das Ganze möglichst leicht zu machen. Z. B.

1) Es sey $x = \frac{1728}{12}$ logarithmisch, und zwar durch die dekadische Ergänzung zu entwickeln, wo natürlich die Zahl 144 herauskommen muß.

Hier ist $\log 1728 = 3{,}2375437$
$\log 12 = 1{,}0791812.$

Ob man nun schon die dekadische Ergänzung der Kürze halber so macht, daß man gleich aus der Tafel die Subtraction nur in Gedanken verrichtet, und den Rest niederschreibt, so will ich doch hier solche wirklich verrichten, um die Richtigkeit zugleich zu erweisen.

Man ziehe von 10,0000000 den
Logarithmus von 12 = 1,0791812, so ist

Rest oder dek. Erg. $\log 12 = 8{,}9208188.$

Hier sieht man deutlich, daß jede Ziffer von 9, die letzte 2 aber von 10 abgezogen worden ist.

Sollte nun z. B. 7 von 12 abgezogen werden, so ist

es einerlei, ob man setzt 12 — 7 = 5, oder (da 3 die dekadische Ergänzung von 7 ist) 12 + 3 — 10 = 15 — 10 = 5; eben so ist es auch oben, und wir wollen das gegebene Beispiel auf beide Arten ausführen.

$$\begin{aligned} log\ 1728 &= 3{,}2375437 \\ -\ log\ 12 &= 1{,}0791812 \\ \hline log\ x &= 2{,}1583625 \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} log\ 1728 &= 3{,}2375437 \\ +\ Dek.\ Erg.\ log\ 12 &= 8{,}9208188 - 10 \\ \hline log\ x &= 12{,}1583625 - 10 \\ &= 2{,}1583625 = log\ 144. \end{aligned}$$

Eben so ist es auch bei größeren Berechnungen, wo mehrere dekadische Ergänzungen addirt werden.

Ich will hier das erste Beispiel des 269. §. berechnen, um auch hier zu zeigen, daß dasselbe Resultat erscheint. Es sey nämlich

$$2)\qquad x = \frac{2008\ .\ 3{,}14\ .\ 57868}{250\ .\ 27{,}234}$$

So ist hier

$$\begin{aligned} log\ 2008 &= 3{,}3027637 \\ +\ log\ 3{,}14 &= 0{,}4969296 \\ +\ log\ 57867 &= 4{,}7624385 \\ +\ D.E.\ log\ 250 &= 7{,}6020600 - 10 \\ +\ D.\ E.\ log\ 27{,}234 &= 8{,}5648886 - 10 \\ \hline log\ x &= 24{,}7290804 - 20 \\ &= 4{,}7290804 \\ &= log\ 53589\ 57 \end{aligned}$$

$$3)\qquad x = \frac{74256\ .\ 2045\ .\ 0{,}00347}{2{,}56\ .\ 203{,}47}$$

So ist

$$\begin{array}{rcl}
\log 74256 & = & 4,8707316 \\
+ \log 2045 & = & 3,3106933 \\
+ \log 0,00347 & = & 0,5403295 - 3 \\
+ D.\,E.\log 2,56 & = & 9,5917600 - 10 \\
+ D.\,E.\log 203,47 & = & 7,6914996 - 10 \\
\hline
\log x & = & 26,0050140 - 23 \\
\log x & = & 3,0050140 = \log 1011,612.
\end{array}$$

4) $$x = \frac{34,56}{69,9\;.\;48,56}$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 34,56 & = & 1,5385737 \\
+ D.\,E.\log 69,9 & = & 8,1555228 - 10 \\
+ D.\,E.\log 48,56 & = & 8,3137213 - 10 \\
\hline
\log x & = & 18,0078178 - 20 \\
\log x & = & 0,0078178 - 2 \\
x & = & 0,01018164.
\end{array}$$

§. 271.

(No. 83.)

Die folgenden Beispiele mögen zeigen, wie die unbekannte Größe, wenn solche auf verschiedene Art als Exponent vorkömmt, durch Logarithmen gefunden wird.

1) $$\begin{array}{c}
a^x = b \\
\hline
\log a^x = \log b \\
\hline
x \log a = \log b \\
\hline
x = \dfrac{\log b}{\log a}
\end{array}$$

2) $$\begin{array}{c}
a^{nx}\, b^{mx} = c \\
\hline
nx \log a + mx \log b = \log c \\
\hline
x\,(n \log a + m \log b) = \log c \\
\hline
x = \dfrac{\log c}{n \log a - m \log b}
\end{array}$$

3) $a^{mx+f} \; b^{nx+g} = c^{px+h} \; d^{qx+k}$

$$(mx + f) \log a + (nx + g) \log b$$
$$= (px + h) \log c + (qx + k) \log d$$

$$mx \log a + f \log a + nx \log b + g \log b$$
$$= px \log c + h \log c + qx \log d + k \log d$$

$$mx \log a + nx \log b - px \log c - qx \log d$$
$$= h \log c + k \log d - f \log a - g \log b$$

$$x(m \log a + n \log b - p \log c - q \log d)$$
$$= h \log c + k \log d - f \log a - g \log b$$

$$x = \frac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d}$$

4) $\left[\frac{756}{345}\right]^{\frac{3x}{2}} = 54783$

$$\log \left[\frac{756}{345}\right]^{\frac{3x}{2}} = \log 54783$$

$$\frac{3x}{2} \log \frac{756}{345} = \log 54783$$

$$3x \log \frac{756}{345} = 2 \log 54783$$

$$3x \log 756 - 3x \log 345 = 2 \log 54783$$

$$x (3 \log 756 - 3 \log 345) = 2 \log 54783$$

$$x = \frac{2 \; . \; 4{,}7386458}{3 \; . \; 2{,}8785218 - 3 \; . \; 2{,}5378191}$$

woraus

$$x = 9{,}272 \; . \; . \; . \; . \; .$$

5) $3^{2x} \; . \; 5^{6x-7} = 9^{x-2} \; . \; 7^{1-x}$

$$2x \log 3 + (6x - 7) \log 5$$
$$= (x - 2) \log 9 + (1 - x) \log 7$$

$$2x \log 3 + 6x \log 5 - 7 \log 5$$
$$= x \log 9 - 2 \log 9 + \log 7 - x \log 7$$

$$2x \log 3 + 6x \log 5 - x \log 9 + x \log 7$$
$$= 7 \log 5 - 2 \log 9 + \log 7$$

$$x(2\log 3 + 6\log 5 + \log 7 - \log 9)$$
$$= 7\log 5 - 2\log 9 + \log 7$$

$$x = \frac{7\log 5 - 2\log 9 + \log 7}{2\log 3 + 6\log 5 + \log 7 - \log 9}$$

6) $ac^{mx} - bc^{\frac{mx}{2}} = d,\ x$

Diese Gleichung kann noch nicht logarithmisch behandelt werden, und muß erst folgende algebraische Behandlung vorhergehen.

$$c^{mx} - \frac{b}{a} \cdot c^{\frac{mx}{2}} = \frac{d}{a}$$

$$c^{mx} - \frac{b}{a} \cdot c^{\frac{mx}{2}} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{d}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$c^{\frac{mx}{2}} - \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ad + b^2}{4a^2}}$$

$$c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ad + b^2}}{2a}$$

$$c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}$$ Nun ist

$$\log c^{\frac{mx}{2}} = \log\left[\frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}\right]$$

$$\frac{mx}{2}\log c = \log\left[\frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}\right]$$

$$x = \frac{2}{m\log c} \cdot \log\left[\frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}\right]$$

7) $16^x \cdot \left[\frac{4}{7}\right]^{x+3} = 4^{x-7} \cdot 585,143$

$$x\log 16 + (x+3)\log\frac{4}{7} = (x-7)\log 4 + \log 585,143$$

$$x\log 16 + x\log\frac{4}{7} + 3\log\frac{4}{7} = x\log 4 - 7\log 4 + \log 585,143$$

$$x \log 16 + x \log 4 - x \log 7 + 3 \log 4 - 3 \log 7$$
$$= x \log 4 - 7 \log 4 + \log 585{,}143$$

$$x(\log 16 - \log 7) = \log 585{,}143 - 3 \log 4 - 7 \log 4 + 3 \log 7$$

$$x = \frac{\log 585{,}143 - 10 \log 4 + 3 \log 7}{\log 16 - \log 7} \quad \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \log 585{,}143 &= 2{,}7672620 \\ + 3 \log 7 &= 2{,}5352940 \\ & 5{,}3025560 \\ - 10 \log 4 &= 6{,}0206000 \\ \textit{Dividendus } A &= -0{,}7180440 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 16 &= 1{,}2041200 \\ - \log 7 &= 0{,}8450980 \\ \textit{Divisor } B &= 0{,}3590220 \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{-0{,}7180440}{0{,}3590220} = -2 = x$

Als Probe ist nun die Gleichung

$$16^{-2} \cdot \frac{4}{7} = 4^{-9} \cdot 585{,}143$$

$$\frac{4}{7 \cdot 16^2} = \frac{585{,}143}{4^9}$$

$$\frac{4 \cdot 4^9}{7 \cdot 16^2} = 585{,}143$$

$$\frac{4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2}{7 \cdot 4^2 \cdot 4^2} = 585{,}143$$

$$\frac{4^6}{7} = 585{,}143$$

$$\frac{4096}{7} = 585{,}143 \ldots$$

Wenn in Aufgaben, die logarithmisch entwickelt werden sollen, noch die Zeichen + und — vorkommen, so müssen solche erst weggeschafft werden, indem man, wenn (was natürlich dazu gehört) ihre Zahlen-Werthe gegeben sind, solche an ihre Stelle setzt, und die Additionen und

Subtractionen verrichtet, bis ein Factor kein + oder — Zeichen mehr hat.

In der vorigen Aufgabe müßte deßhalb der Ausdruck $\left[\frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}\right]$ erst durch numerische Behandlung auf eine Zahl gebracht werden: fände sich nun dadurch, z. B. $\left[\frac{b \pm \sqrt{4ad + b^2}}{2a}\right] = A$

so wäre sodann

$$x = \frac{2}{m \log c} . \log A$$

$$x = \frac{2 \log A}{m \log c}$$

§. 272.

(No. 84.)

Man kann aus den bereits gefundenen Logarithmen auch jeden Logarithmus für ein ander System finden.

Das bereits berechnete System habe die Grundzahl $= a$
Ein anderes habe die Grundzahl $= A$
Nun sey für Grundzahl a, $a^m = b$. Also
$m = \log b$
Für die Grundzahl A, $A^x = b$. Also
$x = \log b$

So ist nun auch $A^x = a^m$

Mithin

$$x \log A = m \log a$$

$$x = \frac{m \log a}{\log A}$$

Da nun in jedem System der Logarithmus der Grundzahl $= 1$, so ist auch

$$\log a = 1$$

und nun $x = \frac{m . 1}{\log A}$ und da $m = \log b$

$$\text{so ist } x = \frac{1 \cdot \log b}{\log A}$$

$$\text{endlich } x = \frac{1}{\log A} \cdot \log b$$

Z. B. Aus dem Briggischen Systeme soll $\log x$ von irgend einer Zahl b für die Grundzahl $A = 5$ berechnet werden. So ist

$$x = \frac{1}{\log brig\ 5} \cdot \log brig\ b$$

$$x = \frac{1}{0{,}6989700} \cdot \log brig\ b$$

$$x = \frac{1{,}00000\varnothing\varnothing}{0{,}69897\varnothing\varnothing} \cdot \log brig\ b$$

$$x = \frac{100000}{69897} \cdot \log brig\ b$$

$$x = 1{,}4306766 \cdot \log brig\ b$$

Man darf also jeden Briggischen Logarithmus mit dem Decimalbruche 1,4306766 multipliciren, so erhält man denselben Logarithmus für das System, dessen Grundzahl = 5. Dieser Decimalbruch wird das **Modul** oder **Maaß des neuen Systems** genannt; und so würde man für jedes neue System aus den bereits berechneten ein Modul auf ähnliche Art finden können.

Anwendung der logarithmischen Berechnung, in Verbindung mit den geometrischen Reihen. Zins auf Zins-, Leibrenten- und andere hierher gehörige Rechnungen.

---

§. 273.

(No. 85.)

Aufgabe 1. Der Erfinder des Schachspiels verlangte zur Belohnung von dem Kaiser, auf das erste Feld des

Schachbrets 1, auf das zweite 2, auf das dritte 4, das vierte 8 u. s. w. Waizenkörner. Wie viel beträgt dieses auf alle 64 Felder des Schachbrets?

Hier ist $a = 1$, $q = 2$, $n = 64$

und die Formel

No. 6. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

Also $s = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1}$

d. i. $s = 2^{64} - 1$

Nun ist $\log 2 = 0{,}3010300$

$$\begin{array}{r} 0{,}3010300 \\ 64 \\ \hline 12041200 \\ 18061800 \\ \hline \end{array}$$

$64 \log 2 = 19{,}2659200$

Es ist also zu den Logarithm. 19,2659200 die Zahl zu suchen und 1 davon abzuziehen.

Nun ist $*{,}2659200 = \log 1844675$

Also $19{,}2659200 = \log 18446750000000000000$

d. i. $2^{64} - 1 = 18446750000000000000$

$$\begin{array}{r} 18446750000000000000 \\ -\ 1 \\ \hline \end{array}$$

und $2^{64} - 1 - 18446749999999999999$

Man kann jedoch diese Rechnung auch ohne Logarithmen, und zwar noch schärfer führen, doch ist diese Art mit mehr Mühe verknüpft, und läßt sich nicht überall statt der Logarithmen anbringen. Nämlich

$s = 2^{64} - 1$

$s = (2^8)^8 - 1$

$s = (256)^8 - 1$

$s = (256^2)^4 - 1$

$s = (65536)^4 - 1$

$s = (65536^2)^2 - 1$

$s = (4294967296)^2 - 1$

$s = 18446744073709551616 - 1$

$s = 18446744073709551615$

wo man sieht, daß die ersten 7 Ziffern mit der logarithmischen Berechnung völlig übereinstimmen, in den 13 letzten Ziffern aber die obige Summe zu groß ausfällt.

Aufgabe 2. Es spielt Jemand in der Zahlen-Lotterie, und setzt das erste Mal 3 Gr., das zweite Mal 6 Gr., das dritte Mal 12 Gr. u. s. w. Wie viel wird er in 12 Setzungen verlieren, wenn er immer verliert?

Hier ist $a = 3$, $q = 2$, $n = 12$ und nach Formel 6) $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

$$s = \frac{3(2^{12} - 1)}{2 - 1}$$

$$\underbrace{s = 3 \;.\; 2^{12} - 1}$$

Nun ist Logarithm. 2 = 0,3010300
12
6020600
3010300
3,6123600

Der nächste kleinere Log. = 3,6123599 = log 4096
1

Da hier zu der Differenz 1 kein Proportionaltheil, sondern erst zu der Differenz 11 (Siehe Vega's Tafeln pag. 67) die Zahl 1 gehört, so kann obige Differenz unberücksichtigt bleiben.

Also ist

$$s = 3 \;.\; (4096 - 1)$$

$$s = 3 \;.\; 4095 = 12285 \text{ Groschen.}$$

Aufgabe 3. Es sollen zwischen 1 und 2 11 Glieder eingeschaltet werden, damit eine geometrische Reihe von 13 Gliedern herauskömmt.

$a = 1$, $t = 2$, $n = 13$, q zu suchen.

Nach No 13. ist $q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$

$q = \sqrt[12]{2}$

$\log q = \frac{\log 2}{12}$

d. i. $\log q = \frac{0,3010300}{12} = 0,0250858.$

Die Reihe aber ist

$1, q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^9, q^{10}, q^{11}, 2.$

Logarithm. von	=	Reihe.	
		Zahl.	Glied.
. .	. .	$q = 1$	1
$\log q$	0,0250858	$q^1 = 1,059$	2
$2 \log q$	0,0501716	$q^2 = 1,122$	3
$3 \log q$	0,0752574	$q^3 = 1,189$	4
$4 \log q$	0,1003432	$q^4 = 1,259$	5
$5 \log q$	0,1254290	$q^5 = 1,334$	6
$6 \log q$	0,1505148	$q^6 = 1,414$	7
$7 \log q$	0,1756006	$q^7 = 1,498$	8
$8 \log q$	0,2006864	$q^8 = 1,587$	9
$9 \log q$	0,2257722	$q^9 = 1,681$	10
$10 \log q$	0,2508580	$q^{10} = 1,781$	11
$11 \log q$	0,2759438	$q^{11} = 1,887$	12
$12 \log q$	0,3010296	$q^{12} = 2,000$	13

Hier differirt der Logarithmus von 2 um 4 Einheiten in der 7ten Decimalstelle, welches daher rührt, weil oben die Division durch 12 in solche nicht genau aufging: es thut aber dieser Unterschied der Rechnung und ihrer Richtigkeit keinen Eintrag.

Aufgabe 4. Es säet Jemand eine Metze Waizen; die Aernte davon säet er im 2ten Jahre wieder ganz; und von dieser 2ten Aussaat wieder die ganze Aernte im 3ten Jahre u. s. w. Wie viel wird er im 10ten Jahre ärn-

ten, wenn man annimmt, daß eine Metze Aussaat 4 Metzen Aernte bringt?

Hier ist die erste Aernte $a = 4$,
$q = 4$, $n = 10$, t zu suchen.

Also nach Formel 1
$$t = aq^{n-1} = 4 \,.\, 4^{10-1} = 4 \,.\, 4^9 = 4^{10}.$$
Also
$$\log t = 10 \log 4 = 10 \,.\, 0{,}6020600 =$$
$$= 6{,}0206000 = \log 1048576.$$

Also 1048576 Metzen wäre die Aernte des 10ten Jahres.

Aufgabe 5. Welchen Quotienten hat eine geometrische Progression, deren erstes Glied 5, das letzte 80, und die Anzahl der Glieder 32 ist?

Hier ist $n = 32$, $a = 5$, $t = 80$
q zu suchen.

So ist nach Formel 13
$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$
$$\text{d. i. } q = \sqrt[31]{\frac{80}{5}} = \sqrt[31]{16}$$
$$\log q = \log \sqrt[31]{16}$$
$$\log q = \frac{\log 16}{31} = \frac{1{,}2041200}{31} = 0{,}0388425$$
Also $q = 1{,}09356$.

Aufgabe 6. Wie ist die Summe von voriger Reihe?

So ist wieder $a = 5$, $t = 80$, $n = 32$
$q = 1{,}09356$. Also nach Formel 5
$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$
$$s = \frac{80 \,.\, 1{,}09356 - 5}{1{,}09356 - 1}$$
$$s = \frac{80 \,.\, 1{,}09356 - 5}{0{,}09356}$$

So wie oben $log\ 1{,}09356 = 0{,}0388425$

$$log\ 80 = 1{,}9030900$$

$$log\ (80\ .\ 1{,}09356) = 1{,}9419325$$

$$= log\ 87{,}48478$$

deßhalb $tq = 87{,}48478$

und $tq - a = 87{,}48478 - 5$

$$= 82{,}48478$$

Und nun $ſ = \frac{82{,}48478}{0{,}09356} = \frac{8248478}{9356}$

$$= 881{,}62.$$

Etwas schwieriger und weitläuftiger ist die Auflösung nach Formel 8; um aber den Gebrauch dieser Formel zu zeigen, will ich die Ausführung hersetzen. Es ist nämlich No. 8.

$$ſ = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$ſ = \frac{80^{\frac{32}{31}} - 5^{\frac{32}{31}}}{80^{\frac{1}{31}} - 5^{\frac{1}{31}}} \qquad A$$

Diese Glieder müssen nun alle erst allein logarithmisch entwickelt werden.

Es ist nämlich $log\ 80^{\frac{32}{31}} = \frac{32}{31}\ .\ log\ 80$

eben so $log\ 5^{\frac{32}{31}} = \frac{32}{31}\ .\ log\ 5$

Auch ist $log\ 80^{\frac{1}{31}} = \frac{1}{31}\ .\ log\ 80$

und $log\ 5^{\frac{1}{31}} = \frac{1}{31}\ .\ log\ 5$

$log\ 80 = 1{,}9030900,\ \frac{log\ 80}{31} = 0{,}0613900$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{31}{31}\ .\ log\ 80 = 1{,}9030900 \\ \frac{1}{31}\ .\ log\ 80 = 0{,}0613900 \end{array}\right\}\ \text{addirt.}$$

$$\frac{32}{31} \cdot \log 80 = 1{,}9644800 = \log 92{,}14674$$

Und $80^{\frac{32}{31}} = 92{,}14674$ A.

Ferner

$$\log 5 = 0{,}6989700; \frac{1}{31} \cdot \log 5 = 0{,}0225474$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{31}{31} \log 5 = 0{,}6989700 \\ \frac{1}{31} \log 5 = 0{,}0225474 \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$\frac{32}{31} \log 5 = 0{,}7215174 = \log 5{,}266444$$

und $5^{\frac{32}{31}} = 5{,}266456$ B.

So ist nun

$92{,}146740 - 5{,}266444 = 86{,}880296$

$=$ dem Dividendus der Gleichung A.

Nun ist ferner

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{31} \log 80 = 0{,}0613900 = \log 1{,}151834 \\ \frac{1}{31} \log 5 = 0{,}0225474 = \log 1{,}053289 \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$0{,}098545$

$=$ Divisor der Formel A.

Woraus

$$f = \frac{86{,}880296}{0{,}098545} = 881{,}62$$

wie oben.

Zins auf Zins-Rechnung.

§. 274.

(No. 86.)

Man legt ein Capital a zu c Procent jährlicher Interessen an, und schlägt am Ende jedes Jahres die In-

teressen zum Capital; wie hoch wird dieses Capital in n Jahren anwachsen? So ist

da 100 jährlich c geben

$$100 : c = a : \frac{ac}{100}$$

Folglich $\frac{ac}{100}$ die Interessen des Capitals a vom ersten Jahre. Deßhalb

$$a + \frac{ac}{100} = \frac{100a + ac}{100} =$$

$$a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^1 = \text{Capital sammt Interessen}$$

am Schlusse des ersten Jahres.

Nun ist wieder

$$100 : c = \frac{100a + ac}{100} : \frac{100ac + ac^2}{100^2} \text{ und}$$

$\frac{100ac + ac^2}{100^2}$ die Interessen am Ende des 2ten Jahres.

Deßhalb

$$\frac{100a + ac}{100} + \frac{100ac + ac^2}{100^2} =$$

$$= \frac{10000a + 100ac + 100ac + ac^2}{100^2} =$$

$$= a\left[\frac{100^2 + 200c + c^2}{100^2}\right] = a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^2 =$$

Capital sammt Interessen am Schlusse des zweiten Jahres.

Ferner ist

$$100 : c = a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^2 : \frac{c}{100} \cdot \left[\frac{100 + c}{100}\right]^2 \cdot a$$

und das 4te Glied dieser Proportion die Interessen vom dritten Jahre.

Mithin Capital sammt Interessen am Ende des dritten Jahres.

$$a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^2 + \frac{c}{100} \cdot \left[\frac{100 + c}{100}\right]^2 \cdot a =$$

$$a\left[\frac{100^2+200c+c^2}{100^2}\right]+\frac{c}{100}\left[\frac{100^2+200c+c^2}{100^2}\right].\,a=$$

$$=a\left[\frac{100^2+200c+c^2}{100^2}\right]+\left[\frac{100^2c+200c^2+c^3}{100^3}\right]a=$$

$$=a\left[\frac{100^3+20000c+100c^2+100^2c+200c^2+c^3}{100^3}\right]=$$

$$=a\left[\frac{100^3+30000c+300c^2+c^3}{100^3}\right]=a\left[\frac{100+c}{100}\right]^3$$

Setzt man diese Untersuchungen fort, so erhält man Capital sammt Interessen am Ende des 4ten Jahres

$$=a\left[\frac{100+c}{100}\right]^4$$

Eben so Capital sammt Interessen am Ende des 5ten Jahres

$$=a\left[\frac{100+c}{100}\right]^5$$

Also auch Capital sammt Interessen am Ende des $n$ten Jahres

$$=a\left[\frac{100+c}{100}\right]^n$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen, wenn man $\frac{100+c}{100}=p$ setzt, es ist sodann

$f=ap^n$ Mithin

$\log f=\log a+n\log p$ I

Ehe wir von dieser Formel Gebrauch machen, ist es nur noch nöthig, zu zeigen, wie man p aus c findet.

Es sey $c=3$, nämlich 3 Procent, so ist

$$p=\frac{100+3}{100}=\frac{103}{100}=1{,}03.$$

Ferner $c=3\frac{1}{2}$, so ist

$$p=\frac{100+3\frac{1}{2}}{100}=\frac{100+\frac{7}{2}}{100}=\frac{200+7}{200}=$$

$$=\frac{207}{200}=1{,}035$$

für $c = 4$ ist

$$p = \frac{100 + 4}{100} = \frac{104}{100} = 1{,}04$$

für $c = 4\frac{1}{2}$ ist

$$p = \frac{100 + \frac{9}{2}}{100} = \frac{200 + 9}{200} = \frac{209}{200} = 1{,}045.$$

Eben so findet man

für $c = 5,\ p = 1{,}05$
— $c = 5\frac{1}{2},\ p = 1{,}055$
— $c = 6,\ p = 1{,}06$
— $c = 6\frac{1}{2},\ p = 1{,}065$
— $c = 7,\ p = 1{,}07$
— $c = 7\frac{1}{2},\ p = 1{,}075$
— $c = 8,\ p = 1{,}08$
— $c = 8\frac{1}{2},\ p = 1{,}085$
— $c = 9,\ p = 1{,}09$
— $c = 9\frac{1}{2},\ p = 1{,}095$
— $c = 10,\ p = 1{,}1$ u. s. w.

Aufgabe 1. 1200 Thlr. mit Zins auf Zins zu 5 Procent, wie viel betragen sie nach 10 Jahren?

$$\log f = \log a + n \log p$$

$$\overline{\log f = \log 1200 + 10 \log 1{,}05}$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{10 \log 1{,}05 = 0{,}2118930} \\ + \log 1200 = 3{,}0791812 \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$\overline{\log f = 3{,}2910742 = \log 1954{,}67}$$

Also $f = 1954{,}67 = 1954$ Thlr. 16 gr. $\frac{96}{100}$ pf.
$f = 1954$ Thlr. 16 gr. $\frac{24}{25}$ pf.

Aufgabe 2. Ein Capital von 20000 Thlr. zu 5 Procent, wie hoch wird es in 12 Jahren anwachsen?

$$\log f = \log 20000 + 12 \log 1{,}05$$

$$\begin{array}{rcl} log\ 1{,}05 & = & 0{,}0211893 \\ & & 12 \\ \hline & & 423786 \\ & & 211893 \\ \hline 12\ log\ 1{,}05 & = & 0{,}2542716 \\ +\ log\ 20000 & = & 4{,}3010300 \\ \hline \end{array}$$

$$log\ f = 4{,}5553016 = log\ 35917{,}125.$$

$$f = 35917{,}125 \text{ Thlr.}$$

Aufgabe 3. In einer Provinz befinden sich 2000000 Menschen, wenn nun diese Summe jährlich um $\frac{1}{50}$ zunimmt, wie groß wird die Anzahl nach 100 Jahren werden?

Da nun $\frac{1}{50} = \frac{2}{100}$, so ist es auch ersichtlich, daß die Menschen-Menge um 2 Procent wächst. Also ist

$a = 2000000$, $n = 100$, $c = 2$, folglich

$p = 1{,}02$. Mithin

$$log\ f = log\ 2000000 + 100\ log\ 1{,}02$$

wodurch man findet

$$log\ f = 7{,}1610500 = 14489380 \text{ Menschen.}$$

§. 275.

(No. 87.)

Die obige Formel I. kann nicht gebraucht werden, wenn n ein Bruch ist. Z. B. es sey $n = m + \frac{1}{q}$.

Denn wäre $n = 5\frac{1}{2}$ u. dgl., so könnte man nicht setzen

$$f = a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^{5\frac{1}{2}}$$

Wir wollen sogleich hierüber folgende Untersuchung anstellen.

Es ist nach voriger Formel Capital und Interessen nach m Jahren.

A) $a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m$; um nun für dieses Capital die zugehörigen Interessen für das letzte Jahr zu finden, ist

$$100 : c = a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m : \frac{c}{100}\left[\frac{100+c}{100}\right]^m . a$$

Da nun $\frac{c}{100}\left[\frac{100+c}{100}\right]^m . a$ die Interessen für 1 Jahr, so setze man

$$1 : \frac{c}{100}\left[\frac{100+c}{100}\right]^m . = \frac{1}{q} : x, \text{ wo}$$

B) $x = \frac{c}{100q} . a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m$ die Interessen des obigen Capitals A in $\frac{1}{q}$ Jahre: es muß also A und B addirt werden, um Capital sammt Interessen nach $m + \frac{1}{q}$ Jahren zu finden. So ist nun

$$f = a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m + \frac{c}{100q} . a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m$$

C) $f = a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m . \left[1 + \frac{1}{100q}\right]$

Wollte man aber $n = m + \frac{1}{q}$ in die Grundformel setzen, so wäre

D) $f = a \left[\frac{100+c}{100}\right]^{m+\frac{1}{q}} =$

$$= a \left[\frac{100+c}{100}\right]^m . \left[\frac{100+c}{100}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Da nun der erste Factor aus C mit dem ersten Factor aus D übereinstimmt, so müßte auch der 2te dem 2ten gleich seyn: nämlich

$$\left[1 + \frac{c}{100q}\right] = \left[\frac{100+c}{100}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Da nun dieses, wie der Augenschein zeigt, nicht der Fall ist, die Richtigkeit von C aber erwiesen ist, so ist augenscheinlich D unrichtig.

Man kömmt hier am kürzesten weg, wenn man sich

zuerst um den Bruch gar nicht bekümmert, und bloß nach den Ganzen rechnet, wie ich sogleich an dem folgenden Beispiele zeigen werde.

Aufgabe 4. Ich wähle hier der Kürze halber die Aufgabe 1, und ändere sie folgendermaaßen ab.

Ein Capital von 1200 Thlr. zu 5 Procent steht $10\frac{3}{4}$ Jahr; wie hoch wächst es mit Zins auf Zins in dieser Zeit an?

So nehmen wir erst aus Aufgabe 1 das Resultat von 10 Jahren; hier war $s = 1954{,}67$ Thlr.

$$100 : 5 = 1954{,}67 : x$$

$$x = \frac{5 \cdot 1954{,}67}{100} = 5 \;.\; 19{,}5467 =$$

$= 97{,}7335$ Thlr., welche auf das 11te Jahr noch fallen würden. So ist nun nach

$$12 \text{ Monat} : 9 \text{ Monat} = 97{,}7335 : y$$
$$4 : 3 = 97{,}7335 : y$$

$$y = \frac{3 \cdot 97{,}7335}{4} = \frac{293{,}2005}{4} =$$

$= 73{,}3001$ . . Thlr. in $\frac{3}{4}$ Jahren; also

$$s = 1954{,}67 + 73{,}3001 = 2027{,}97 \,..$$

Capital und Interessen nach $10\frac{3}{4}$ Jahren.

Will man nach der jenseitigen Formel C rechnen, nämlich nach

$$s = a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^m \cdot \left[1 + \frac{c}{100q}\right]$$

so ist hier

$$a\left[\frac{100 + c}{100}\right]^m = 1954{,}67 \text{ wie vorher.}$$

Der 2te Factor aber

$\left[1 + \frac{c \cdot 1}{100q}\right]$; da nun hier $\frac{1}{q} = \frac{3}{4}$, so ist

$$1 + \frac{1 \cdot c}{100 \cdot q} = 1 + \frac{3 \cdot 5}{100 \cdot 4} = 1 + \frac{15}{400} =$$

$\frac{415}{400} = 1{,}0375$. Folglich

$$s = 1954{,}67 \;.\; 1{,}0375 = 2027{,}9701$$

wie vorher.

Aufgabe 5. Es legt Jemand ein Capital von 25000 Gulden zu $3\frac{1}{2}$ Procent in die Wiener Bank, und schlägt halbjährig die Interessen zum Capital, wie es dabei üblich ist; was betragen diese mit Zins auf Zins in 20 Jahren?

Es kann hier zwar die Formel

$$f = ap^n$$

gebraucht werden, nur mit dem Unterschied, daß hier n halbe und nicht ganze Jahre bedeuten.

Es ist also hier

$a = 25000$, $n = 20 \,.\, 2 = 40$ halbe Jahre.

$c = 3\frac{1}{2} : 2 = \frac{7}{2} : 2 = \frac{7}{4}$, mithin

$$p = \frac{100 + \frac{7}{4}}{100} = \frac{407}{400} = 1,0175.$$

Es müssen hier die Procente $3\frac{1}{2}$ erst durch 2 dividirt werden, ehe sie angewendet und in p übertragen werden können, weil bei Entwickelung der Formel c die jährlichen Zinsen von 100 waren, hier aber nur von halbjährigen die Rede ist. So ist nun

$$\log f = 25000 + 40 \log 1,0175$$

wodurch man

$$f = 50039,8 \text{ Fl. findet.}$$

Würden hier die Interessen jährlich zum Capital geschlagen, so wäre

$$a = 25000,\ n = 20,\ c = 3\tfrac{1}{2},\ p = 1,035$$

und

$$\log f = \log 25000 + 20 \log 1,035$$

wodurch man

$$f = 49744,6 \text{ Fl. findet.}$$

Es werden also im ersten Falle

$$50039,8 - 49744,6 = 295,2 \text{ Fl.}$$

mehr als im 2ten gewonnen.

§. 276.

(No. 88.)

Aus der obigen Formel I lassen sich noch drei andere Formeln ableiten, nämlich

da $log\ f = log\ a + n\ log\ p$,

so ist auch $log\ a = log\ f - n\ log\ p$ II

eine Formel, wo das angelegte Grundcapital a gefunden wird, wenn die Summa, welche nach einer Anzahl von n Jahren zu c Procenten mit Zins auf Zins eingenommen werden, gegeben ist.

Ferner folgt noch aus Formel I

$$log\ p = \frac{log\ f - log\ a}{n} \qquad \text{III}$$

wo aus dem angelegten Capital a der dafür erhaltenen Summa f, und der Anzahl der Jahre n, welche es gestanden hat, die Procente, auf welche es mit Zins auf Zins gelegen hat, gefunden werden.

Endlich folgt noch aus I

$$n = \frac{log\ f - log\ a}{log\ p} \qquad \text{IV}$$

wo aus Anlage, Einnahme und Procenten die Zeit gefunden wird, wie lange das Capital stand.

Aufgabe 6. Es hat Jemand nach 4 Jahren eine Summe von 6000 Thlr. ohne Interessen zu fordern; er will aber diese Summe sogleich haben, so fragt es sich, wie viel solche werth ist? wenn berücksichtigt wird, daß der Schuldner keine Interessen zu zahlen hat, wohl aber in diesen 4 Jahren Zins auf Zins zu 4 Procent gewinnen könnte.

So ist hier

$$f = 6000,\ n = 4,\ c = 4,\ p = 1{,}04$$

und a nach II zu suchen. Folglich

$$log\ a = log\ 6000 - 4\ log\ 1{,}04$$

$$\begin{array}{l} log\ 1{,}04 = 0{,}0170333;\ log\ 6000 = 3{,}7781513 \\ \qquad\qquad 4 \\ \overline{0{,}0681332} = 4 log 1{,}04 = 0{,}0681332 \end{array} \Big\}\ \text{subtrahirt.}$$

$$log\ a = 3{,}7100181$$

und 3,7100181 = log 5128,827, und

a = 5128,827 Thaler.

Aufgabe 7. Wie groß muß das Capital seyn, welches Zins auf Zins zu 4 Procent in 32 Jahren 2000 Thlr. giebt? Hier ist

$$f = 2000,\ n = 32,\ c = 4,\ p = 1{,}04$$

Also nach Formel II

$$log\ a = log\ 2000 - 32\ log\ 1{,}04$$

wo man durch gleiches Verfahren wie oben

a = 570,1175 Thlr. findet.

Aufgabe 8. Ein Wucherer leiht Jemand 600 Thlr. und läßt sich dafür 800 Thlr. auf 3 Jahre verschreiben; wie viel Procente nimmt er?

hier ist $a = 600,\ f = 800,\ n = 3$

So ist nach Formel III

$$p = \frac{log\ 800 - log\ 600}{3}$$

$$\begin{array}{l} log\ 800 = 2{,}9030900 \\ log\ 600 = 2{,}7781513 \\ \hline log\ f - log\ a = 0{,}1249387 \end{array}$$

$$log\ p = \frac{0{,}1249387}{3} = 0{,}0416462 = log\ 1{,}1006.$$

Mithin $p = 1{,}1006.$

Da nun $p = \frac{100 + c}{100}$

so ist $1{,}1006 = \frac{100 + c}{100}$

und $110{,}06 = 100 + c$

und $110{,}06 - 100 = c$

woraus $10{,}06 = c$

Der Wucherer nimmt also noch über 10 Procent von seinem Capitale.

Aufgabe 9. Man hat ein Capital von 800 Thlr. in einem Handel, und allen Gewinn sogleich wieder angelegt, und zieht nach 6 Jahren zusammen 3600 Thlr.; wie viel Procente sind gewonnen worden?

Hier ist $a = 800$, $s = 3600$, $n = 6$
c zu suchen; so ist nach Formel III

$$\log p = \frac{\log 3600 - \log 800}{6}$$

wo man durch ähnliches Verfahren, wie vorher
$c = 28\frac{1}{2}$ beinahe, findet.

Aufgabe 10. In wie viel Jahren wird ein Capital mit Zins auf Zins zu 5 Procent zum Doppelten anwachsen?

Hier ist $a = a$, $s = 2a$, $p = 1{,}05$
n zu suchen. Also nach IV

$$n = \frac{\log 2a - \log a}{\log 1{,}05}$$

$$n = \frac{\log 2 + \log a - \log a}{\log 1{,}05}$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$

$$= \frac{3010300}{211893} = 14\tfrac{1}{5} \text{ Jahr beinahe.}$$

Aufgabe 11. Wie lange muß ein Capital zu 4 Procent liegen, bis es zum Doppelten anwächst? Hier ist wieder $a = a$, $s = 2a$, $p = 1{,}04$ und n nach IV zu suchen. Also wie vorher

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}04}$$

wo man $n = 17\frac{2}{3}$ Jahre (beinahe) findet.

Aufgabe 12. In wie viel Jahren ist die Volksmenge eines Ortes zehnmal so groß, wenn die jährliche Vermehrung 3 Köpfe vom 100 beträgt?

Hier ist $a = a$, $f = 10a$, $c = 3$, $p = 1{,}03$, also

$$n = \frac{\log 10a - \log a}{\log 1{,}03}$$

$$n = \frac{\log 10 + \log a - \log a}{\log 1{,}03}$$

$$n = \frac{\log 10}{\log 1{,}03}$$ wodurch man

$n = 78$ Jahre (beinahe) findet.

§. 277.

(No. 89.)

Die folgenden Aufgaben, welche nach einer der vorhergehenden Formeln gelöset werden, überlasse ich dem Lernenden zur eigenen Entwickelung.

Aufgabe 13. Es hat Jemand nach 6 Jahren 3750 Thlr. zu bezahlen, die er nicht verzinsen darf; er will sich aber sogleich von dieser Schuld befreien: wie viel kann er bezahlen, wenn er überschlägt, daß er Zins auf Zins zu 4 Procent mit dem Capitale in diesen 6 Jahren gewinnen kann?

2963 Thlr. 16 gr.

Aufgabe 14. Wie lange muß ein Capital zu 4 Procent auf Zinseszinsen stehen, wenn es zum dreifachen anwachsen soll?

Zwischen 28 und 29 Jahren.

Aufgabe 15. Was wird ein Capital von 12000 Thlr. in 10 Jahren, wenn es 6 Procent und Zinseszinsen trägt, und die Zinsen halbjährig zum Capital geschlagen werden?

$21673\frac{1}{3}$ Thlr.

Aufgabe 16. Ein Capital von 3600 Thlr. ist in 12 Jahren zu 5 Procent 5000 Thlr. angewachsen, zu wie viel Procent hat es (mit Zinseszinsen) gestanden?

Zu $3\frac{1}{4}$ Procent.

§. 278.

(No. 90.)

Etwas zusammengesetzter, jedoch auf vorige Formeln und Herleitung gegründet, sind folgende Aufgaben.

A) Wie lange muß ein Capital a zu dem Zinsfuße p stehen, damit es eben so groß anwachse, wie das Capital A auf den Zinsfuß P in n Jahren?

Es stehet x Jahre, so ist dessen Summe

$$s = ap^x, \text{ und } S = AP^n;$$

da nun beide gleich groß seyn sollen, so ist

$$ap^x = AP^n$$

$$x \log p + \log a = n \log P + \log A$$

$$x = \frac{n \log P + \log A - \log a}{\log p} \quad \text{V}$$

Aufgabe 17. Wie lange müssen 3600 Thlr. zu 5 Procent auf Zinseszinsen stehen, um eben so viel zu werden, als 5000 Thlr. zu 4 Procent in 12 Jahren?

Hier ist $a = 3600$, $p = 1{,}05$, $A = 5000$ $P = 1{,}04$, $n = 12$, x zu suchen.

$$x = \frac{12 \log 1{,}04 + \log 5000 - \log 3600}{\log 1{,}05}$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$

$$12 \log 1{,}04 = 0{,}2043996$$
$$+ \log 5000 = 3{,}6989700$$
$$3{,}9033696$$
$$- \log 3600 = 3{,}5563025$$
$$0{,}3470671 = \text{Dividendus}$$
$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893 = \text{Divisor}$$

und $\frac{0{,}3470671}{0{,}0211893} = \frac{3470671}{211893} = 16$ Jahren nebst einem Bruch.

B) Wie groß muß ein Capital seyn, wenn es zum

Zinsfuße p nach n Jahren eben so viel werth seyn soll, als ein Capital A nach m Jahren zum Zinsfuße P?

So ist hier $a = x$ unbekannt. Folglich

$$xp^n = AP^m$$

$$\log x = \log A + m \log P - n \log p \qquad \text{VI}$$

Aufgabe 18. Wie groß muß ein Capital seyn, wenn es zu 4 Procent steht, und nach 15 Jahren so viel werth seyn soll, als 4500 Thlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren?

Hier ist $n = 15$, $p = 1{,}04$, $A = 4500$, P 1,06, $m = 9$. Also

$$\log x = \log 4500 + 9 \log 1{,}06 - 15 \log 1{,}04$$

$$\log 4500 = 3{,}6532125$$

$\log 1{,}06 = 0{,}0253059$; $9 \log 1{,}06 = 0{,}2277531$ } addirt.

$$3{,}8809656$$

$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$; $15 \log 1{,}04 = 0{,}2554995$ } subtrahirt.

$$3{,}6254661$$

$$3{,}6254661 = \log 4221{,}49$$

Also

$x = 4221$ Thlr. 12 gr. beinahe.

C) Wie groß muß der Zinsfuß seyn, wenn ein Capital a nach n Jahren eben so viel werden soll, als ein Capital A nach m Jahren zu dem Zinsfuße P? So ist hier $p = x$ zu suchen, und wieder

$$ax^n = AP^m$$

$$n \log x + \log a = m \log P + \log A$$

$$n \log x = m \log P + \log A - \log a$$

$$\log x \; \frac{m \log P + \log A - \log a}{n} \qquad \text{VII}$$

Aufgabe 19. Zu wie viel Procent müssen 4221 Thlr. durch 15 Jahre mit Zins auf Zins liegen, wenn sie so hoch anwachsen sollen, wie 4500 Thlr. zu 6 Procent in 9 Jahren?

Hier ist $4221 = a$, $n = 15$, $4500 = A$, $m = 9$, $P = 1{,}06$, $p = x$ zu suchen.

$$log\ x = \frac{9\ log\ 1{,}06 + log\ 4500 - log\ 422}{15}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 9\ log\ 1{,}06 & = 0{,}2277531 \\ +\ log\ 4500 & = 3{,}6532125 \end{array}\right\}\ \text{addirt.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} & 3{,}8809656 \\ -\ log\ 4221 & = 3{,}6254154 \end{array}\right\}\ \text{subtrahirt.}$$

$$log\ Dividendus = 0{,}2555502$$

$$\frac{0{,}2555502}{15} = 0{,}0170366$$

und $0{,}0170366 = log\ 1{,}04 = log\ p$

Mithin $c = 4$ Procent.

§. 279.

(No. 91.)

Ein Capital a wird mit Zins auf Zins angelegt, und jährlich nicht allein mit den fälligen Interessen, sondern auch noch um die Summe b am Ende jeden Jahres vermehrt. Wie groß wird die Summe nach n Jahren anwachsen?

Das Capital a, so Anfangs angelegt wird, beträgt nach n Jahren wie vorher

A) $$f = ap^n$$

Da nun zu Ende des ersten Jahres das erste Mal b angelegt wird, so liegt diese Summe nur $(n - 1)$ Jahre, beträgt also am Ende der obigen n Jahre

$$f = bp^{n-1}$$

Eben so liegt die Summe b, so am Ende des 2ten Jahres angelegt wird, $n - 2$ Jahre, und beträgt wie vorher

$$f = bp^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

Endlich beträgt die Summe b, so am Ende des vorletzten, oder zu Anfang des letzten Jahres angelegt wird

$$s = bp^1 = bp$$

Sämmtliche jährliche Zulagen von b betragen also am Ende der ganzen Zeit von n Jahren

$$bp + bp^2 + bp^3 + \ldots bp^{n-2} + bp^{n-1},$$

welche Reihe nur in verkehrter Ordnung gestellt ist.

Sucht man zu dieser Reihe die Summenformel nach No. 6. nämlich nach

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

so erhält man

$$\text{B.} \quad s = \frac{bp^{n-1} \,.\, p - bp}{p - 1} = \frac{bp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1}$$

Da nun die Summe der Aufgabe aus den beiden Summen A und B besteht, so ist für solche

$$s = \underbrace{ap^n}_{\text{C.}} + \underbrace{\frac{bp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1}}_{\text{D.}} \qquad \text{VIII}$$

Aufgabe 20. Man legt ein Capital von 6000 Thlr. zu 5 Procent an, und schlägt jährlich nicht allein die Zinsen zum Capital, sondern legt auch noch am Ende jedes Jahres 500 Thlr. hinzu. Wie groß wird diese Summe nach 10 Jahren anwachsen?

Die Formel VIII kann nicht auf einmal logarithmisch, sondern nur folgendermaaßen gelöset werden.

1) $\log \text{C} = \log a + n \log p$

$\qquad = \log 6000 + 10 \log 1{,}05$

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$; $\log 6000 = 3{,}7781513$

$\qquad 10 \log 1{,}05 = 0{,}2118930$

$\qquad 3{,}9900443 =$

$= 9773{,}37$;

Summa C $= 9773{,}37$ Thlr. $= ap^n$

Nun ist

$$\mathfrak{D} = \frac{500 \,.\, 1,05\,(1,05^9 - 1)}{1,05 - 1}$$

Hier muß zuerst die 9te Potenz von 1,05 logarithmisch gefunden, und 1 davon abgezogen werden, bevor der ganze Ansatz logarithmisch gemacht werden kann.

$$log\ 1,05 = 0,0211893$$
$$9$$
$$9\ log\ 1,05 = 0,1907037 = log\ 1,551328$$
$$p^{n-1} = 1,551328$$
$$p^{n-1} - 1 = 0,551328.$$

Nun kann der Ausdruck erst logarithmisch angesetzt werden.

$$log\left[\frac{bp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1}\right] = log\ 500 + log\ 1,05$$
$$+ log\ 0,551328 - log\ 0,05$$

$$log\ 500 = 2,6989700$$
$$+ log\ 1,05 = 0,0211893$$
$$+ log\ 0,551328 = 0,7414100 - 1$$
$$3,4615693 - 1$$
$$= 2,4615693$$
$$- log\ 0,05 = 0,6989700 - 2$$
$$- \qquad +$$
$$1,7625993 + 2$$
$$= 3,7625993 = log\ 5788,94$$

Summa $\mathfrak{D} = 5788,94$

$\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 9773,37 + 5788,94 =$
$15562,31$ Thlr. $= f$.

Anmerkung. Meyer Hirsch hat S. 275. auf dieselbe Art die Formel VIII, jedoch das 2te Glied nicht wie hier

N) $\frac{bp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1}$, sondern $\frac{b\,(p^n - 1)}{p - 1}$ M)

welches aber daher rührt, daß H. angenommen, es werde am Ende des letzten Jahres noch b zugelegt, wo sodann das

erste Glied der obigen Reihe b würde, und die Summenformel

$$\frac{tq - a}{q - 1} \text{ würde hier } \frac{bp^{n-1} \cdot (p - b)}{p - 1}$$

$$= \frac{bp^n - b}{p - 1} = \frac{b\,(p^n - 1)}{p - 1}$$

Es läßt sich jedoch nicht gut denken, daß, wenn man ein Capital eben eincassiren wollte, erst noch eine Summe zugelegt würde.

§. 280.

(No. 92.)

Legt man aber in voriger Aufgabe zu Ende jedes Jahres eben so viel zu, als man Anfangs anlegte; so ist das Anfangs angelegte Capital, da es n Jahre liegt

$$= ap^n.$$

Das zu Anfange des 2ten Jahres angelegte, so $n - 1$ Jahre liegt $= ap^{n-1}$ u. s. w.

und endlich das Capital, welches zu Anfange des letzten Jahres angelegt wird und nur ein Jahr liegt

$$= ap^1 = ap$$

Also die Summe aller Anlagen in verkehrt gestellter Reihe

$$s = ap + ap^2 + ap^3 + \ldots\ ap^{n-1} + ap^n;$$

nach Formel No. 5. ist diese Reihe, nämlich

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} = \frac{ap^n \cdot p - ap}{p - 1} =$$

$$\text{A.} \ldots\ldots \frac{ap\,(p^n - 1)}{p - 1} \text{ woraus}$$

$$\text{IX} \quad \log s = \log a + \log p + \log(p^n - 1) - \log(p - 1)$$

Aufgabe 21. Ein Kaufmann sollte 6 Jahre hindurch zu Anfange jedes Jahres 4000 Thlr. bezahlen; er hat aber nichts bezahlt. Wie viel ist er am Ende des 6ten Jahres schuldig, wenn die Interessen zu 4 Procent und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Da der Gläubiger, wenn er jährlich die 4000 Thlr. erhalten hätte, solche mit Zins auf Zins hätte nützen kön-

nen, so ist hier die Formel IX in Anwendung zu bringen, und es ist

$$a = 4000,\ n = 6,\ p = 1{,}04, \text{ folglich}$$

$$\log f = \log 4000 + \log 1{,}04 - \log (1{,}04 - 1) + \\ + \log (1{,}04^6 - 1)$$

$$\log f = \log 4000 + \log 1{,}04 + \log (1{,}04^5 - 1) - \log 0{,}04$$

Nun ist $\log 1{,}04 = 0{,}0170333 =$

$$\left.\begin{array}{rl} & = 1{,}0170333 - 1 \\ -\log 0{,}04 & = 0{,}6020600 - 2 \\ & \quad - \qquad\quad + \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$$\log 1{,}04 - \log (1{,}04 - 1) = 0{,}4149733 + 1$$
$$= 1{,}4149733 = \log 26.$$

Es ist nämlich $\frac{1{,}04}{0{,}04} = 26.$

Ferner ist $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$

$$\underline{\qquad\qquad 6}$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}1021998 = \log 1{,}265318$$

Also $(1{,}04)^6 = 1{,}265318$

und $(1{,}04)^6 - 1 = 0{,}265318$

Nun ist $\log 0{,}265318 = 0{,}4237667 - 1$

$$+ \log 1{,}04 - \log 0{,}04 = 1{,}4149733$$
$$+ \log 4000 = 3{,}6020600$$

$$\log f = 5{,}4408000 - 1$$
$$= 4{,}4408000$$
$$= \log 27593{,}07 \text{ Thlr.}$$

Aufgabe 22. Es legt Jemand 15 Jahre hindurch zu Anfange eines jeden Jahres 100 Thlr. an, und schlägt die Interessen zu 5 Procent immer sogleich zum Capital; wie viel hat er am Ende des 15ten Jahres?

Diese Aufgabe ganz nach der vorigen Formel IX, und auf die eben gezeigte Art gelöset, giebt:

$$f = 2265{,}6 \text{ Thlr.}$$

§. 281.

(No. 93.)

Aus der Formel IX lassen sich nun noch zwei andere Formeln für zwei verschiedene Fälle herleiten. Nämlich da

$$\frac{ap\,(p^n - 1)}{p - 1} = f$$

so ist auch $ap(p^n - 1) = f(p - 1)$

und $a = \frac{f(p - 1)}{p\,(p^n - 1)}$

$$\log a = \log f + \log(p - 1) - \log p - \log(p^n - 1) \quad \text{X.}$$

Aufgabe 23. Es hat Jemand nach 20 Jahren 10000 Thlr. ohne Interesse zu erhalten, er will aber dafür, während dieser 20 Jahre, jedes Jahr eine gleiche Summe dafür erheben, damit die Schuld in 20 Jahren getilgt sey. Wie viel kann ihm jährlich gezahlt werden, wenn die Interessen zu 4 Procent üblich sind?

Hier ist $f = 10000$, $n = 20$, $c = 4$, $p = 1{,}04$ und nach Formel X

$$\log a = \log 10000 + \log 0{,}04 + D.\,E.\,\log\,(1{,}04) + D.\,E.\,\log\,(1{,}04^{20} - 1)$$

($D.\,E.$ Dekadische Ergänzung)

$$20 \log 1{,}04 = 0{,}3406660 = \log 2{,}191119$$
$$1{,}04^{20} - 1 = 1{,}191119 = 1{,}19112$$

Also nun

$$\begin{array}{rl} \log 10000 & = 4{,}0000000 \\ + \log 0{,}04 & = 0{,}6020600 - 2 \\ + D.\,E.\,\log 1{,}19112 & = 9{,}9240445 - 10 \\ + D.\,E.\,\log 1{,}04 & = 9{,}9829667 - 10 \\ \hline \log f & = 24{,}5090712 - 22 \\ & = 2{,}5090712 = \log 322{,}902 \end{array}$$

Mithin können 20 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres 322,902 Thaler erhoben werden.

Der Empfänger bekömmt also im Ganzen

$20 \cdot 322{,}902 = 6458{,}04$ Thlr.

Es ergiebt sich hieraus, daß der Zahler dieses Capitals $10000 - 6458{,}04 = 3541{,}96$ Thlr. in diesen 20 Jahren damit gewinnen könnte.

Aus obiger Gleichung

$$\frac{ap(p^n - 1)}{p - 1} = s$$

läßt sich nun noch folgende Formel entwickeln:

So ist $ap(p^n - 1) = s(p - 1)$

$$ap^{n+1} - ap = s(p - 1)$$

$$ap^{n+1} = s(p - 1) + ap$$

$$p^{n+1} = \frac{s(p - 1) + ap}{a}$$

$$(n + 1) \log p = \log [s(p - 1) + ap] - \log a$$

$$(n + 1) = \frac{\log [s(p - 1) + ap] - \log a}{\log p}$$

$$n = \frac{\log [s(p - 1) + ap] - \log a}{\log p} - 1 \quad \text{XI.}$$

Aufgabe 24. Einer ist 1000 Thlr. schuldig, und bezahlt zu Ende jedes Jahres 100 Thlr.; wie lange wird er zu zahlen haben, wenn die Interessen zu 4 Procent und Zins auf Zins in Anschlag gebracht werden?

Hier ist für Formel XI

$a = 100$, $s = 1000$, $p = 1{,}05$, also

$p - 1 = 0{,}05$, $s(p - 1) = 0{,}05 \cdot 1000$

$= 50$, $ap = 100 \cdot 1{,}05 = 105$

$s(p - 1) + ap = 50 + 105 = 155$

$$n = \frac{\log 155 - \log 100}{\log 1{,}05} - 1$$

$$\begin{array}{r} \log 155 = 2{,}1903317 \\ - \log 100 = 2, \\ \hline 0{,}1903317 \end{array}$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$

$$\frac{0{,}1903317}{0{,}0211893} = \frac{1903317}{211893}$$

$= 8{,}98$. Folglich

$$n = 8{,}98 - 1 = 7{,}98.$$

Die Schuld würde also am Schlusse des 8ten Jahres völlig getilgt seyn, welches ohne Berücksichtigung der Zinseszinsen erst am Ende des 10ten Jahres der Fall wäre.

§. 282.

(No. 94.)

Legt man aber zu Ende eines jeden Jahres jedesmal a Thlr. auf Zinseszinsen, und auch am Ende des letzten Jahres noch eben soviel dazu, so bleiben die letzten a Thlr. unverändert: die das Jahr vorher angelegten a Thlr. wachsen zu ap, die 2 Jahre vorher angelegten zu ap^2 u. s. w., und die am Ende des ersten Jahres angelegten zu ap^{n-1} an.

Die Reihe ist also

$$a + ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \ldots . ap^{n-1}.$$

Da nun $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ so ist hier

$$s = \frac{ap^{n-1} \cdot p - a}{p - 1} = \frac{ap^n - a}{p - 1} = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1}$$

Also

$$\log s = \log a + \log (p^n - 1) - \log (p - 1). \quad \text{XII.}$$

Aufgabe 25. Es legt Jemand von seiner Einnahme am Ende jedes Jahres 100 Thlr. zu 5 Procent mit Zinseszinsen an, und so 15 Jahre hindurch, doch so, daß er am Ende des 15ten Jahres auch noch 100 Thlr. zulegt; wie viel beträgt dieses zusammen mit diesen 100 Thlrn.?

So ist nach Formel XII

$$\log s = \log 100 + \log (1{,}05^{15} - 1) - \log 0{,}05$$

hier ist (1,05 — 1) auf die mehr gezeigte Art berechnet = 1,0789.

Also

$$
\begin{array}{rl}
\log 1{,}0789 = & 0{,}329812 \\
+ \log 100 = & 2, \\
\hline
& 2{,}0329812 \\
- \log 0{,}05 = & 0{,}6989700 - 2 \\
& - \quad\quad + \\
\hline
\log s = & 1{,}3340112 + 2 \\
= & 3{,}3340112 = \log 2157{,}8 \text{ Thlr.}
\end{array}
$$

Vergleicht man diese Aufgabe mit No. 22, so ergiebt sich, daß man

2265,6 — 2157,8 = 107,8 Thlr.

mehr gewinnt, wenn man am Schlusse des letzten Jahres nichts mehr zulegt, zu Anfange des ersten Jahres aber ebenfalls 100 Thlr. angelegt werden.

§. 283.

(No. 95.)

Ein Capital a zu c Procent mit Zins auf Zins wird angelegt, am Ende jedes Jahres aber b davon genommen; wie groß wird der Rest R nach n Jahren seyn?

Wenn vom Capital a nichts weggenommen wird, so beträgt es nach n Jahren

$$s = ap^n.$$

Wenn die Summe b, so am Ende des ersten Jahres weggenommen wird, liegen bliebe, so würde sie in $n - 1$ Jahre zu bp^{n-1} anwachsen. Die am Ende des 2ten Jahres weggenommene, würde zu bp^{n-2} anwachsen u. s. w., und die Summe, so am Ende des vorletzten Jahres weggenommen wird, wird in diesem Falle zu bp anwachsen, und am Ende des letzten Jahres noch b liegen bleiben.

Es gehen also im Ganzen von ap^n ab

$$b + bp + bp^2 + bp^3 + \ldots . bp^{n-1}.$$

Die Summenformel dieser Reihe auf vorige Art gefunden, giebt

$$f = \frac{bp^{n-1} \cdot p - b}{p - 1} = \frac{bp^n - b}{p - 1} = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

Also wäre der Rest

$$R = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1} \qquad \text{XIII}$$

Aufgabe 26. Es legt Jemand 30000 Thlr. zu 4 Procent an, und nimmt jährlich 800 Thlr. zu seinem Unterhalt weg; den Ueberrest schlägt er zum Capital. Wie groß ist dieses Capital nach 15 Jahren?

$$a = 30000,\ b = 800,\ n = 15,\ c = 4,\ p = 1{,}04$$

$$R = 30000 \cdot (1{,}04)^{15} - \frac{800 \cdot (1{,}04)^{15} - 800}{0{,}04}$$

Hier muß vor allen Dingen $(1{,}04)^{15}$ zuerst logarithmisch entwickelt werden.

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333;\ 15 \log 1{,}04 = 0{,}2554995$$
$$+ \log 30000 = 4{,}4771213$$
$$\log ap^n = 4{,}7326208 =$$
$$= \log 54028{,}23 \text{ und } ap^n = 54028{,}23 \text{ Thlr.}$$

Ferner ist nun

$$\log 800 = 2{,}9030900$$
$$15 \log 1{,}04 = 0{,}2554995$$
$$3{,}1585895 = \log 1440{,}753$$

davon abgezogen 800

bleibt 640,753

Also nun

$$\frac{800 \cdot (1{,}04)^{15} - 800}{0{,}04} = \frac{640{,}753}{0{,}04} = \frac{640753}{40}$$
$$= 16018{,}37 \text{ Thlr.}$$

Endlich

$$30000 \cdot (1{,}04)^{15} - \frac{800 \cdot (1{,}04)^{15} - 800}{0{,}04}$$

$= 54028{,}23 - 16018{,}37 = 38009{,}86$ Thlr.
$= R.$

§. 284.

(No. 96.)

Wenn man an Jemand ein Capital a übergiebt, wogegen dieser dafür jährlich n Jahre hindurch eine gewisse Summe b auszahlt, so nennt man a die Mise, b eine $n$fache jährliche Rente, der Empfänger des Capitals a heißt der Unternehmer und der Empfänger der Jahrszahlungen b, wird der Rentenirer genannt.

Aus der Formel XIII lassen sich noch drei andere, in die Rechnung mit sogenannten Leibrenten gehörige Formeln entwickeln.

Es war

$$R = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

$$\frac{b(p^n - 1)}{p - 1} + R = ap^n$$

$$\frac{b(p^n - 1)}{p^n(p - 1)} + \frac{R}{p^n} = a \qquad \text{XIV}$$

Aufgabe 27. Es hat Jemand durch 6 Jahre hindurch eine Rente von 500 Thlr. zu genießen; er will diese Rente verkaufen, was wird sie jetzt werth seyn, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ Procent gerechnet werden?

$b = 500,\ c = 3\frac{1}{2},\ n = 6,\ R = 0,\ p = 1{,}035$

$$a = \frac{500 \cdot (1{,}035)^6 - 500}{1{,}035^6 \cdot 0{,}035}$$

weil das 2te Glied $\frac{R}{p^n}$ wegen $R = 0$, auch $= 0$ ist.

$$\begin{array}{rcl} log\ 1{,}035 & = & 0{,}0149403 \\ & & 6 \\ \hline 6\ log\ 1035 & = & 0{,}0896418 \\ +\ log\ 500 & = & 2{,}6989700 \\ \hline \end{array}$$

$$log\ 500\ .\ (1{,}035)^6 = 2{,}7886118 = 614{,}6271$$
$$-\ 500$$
$$Dividendus\ von\ a = 114{,}6271$$
$$log\ 114{,}6271 = 2{,}0592873 = log\ Dividendus$$

Ferner ist

$$6\ log\ 1{,}035 = 0{,}0896418$$
$$+\ log\ 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$$
$$log\ (1{,}035)^6\ .\ 0{,}035 = 0{,}6337098 - 2 = log\ Divisor.$$

Folglich

$$2{,}0592873$$
$$0{,}6337098 - 2$$
$$- \quad +$$
$$1{,}4255775 + 2 =$$
$$= 3{,}4255775 = log\ 2664{,}26\ \text{Thlr.}$$

welche die Rente werth ist.

Aufgabe 28. Wie groß muß die Mise seyn, wofür ich 12 Jahre hindurch alle Jahre 300 Thaler beziehe, wenn der Zinsfuß 5 Procent gerechnet ist?

Hier ist $b = 300$, $c = 5$, $p = 1{,}05$, $R = 0$.

So ist nach voriger Formel

$$a = \frac{300\ .\ (1{,}05)^{12} - 300}{(1{,}05)^{12}\ .\ 0{,}05} \quad \text{oder}$$

$$a = \frac{300\ .\ (1{,}05)^{12}}{0{,}05\ .\ (1{,}05)^{12}} - \frac{300}{(1{,}05)^{12}\ .\ 0{,}05} \quad \text{d. i.}$$

$$a = \frac{300}{0{,}05} - \frac{300}{(1{,}05)^{12}\ .\ 0{,}05} \quad \text{endlich}$$

$$a = 6000 - \frac{300}{(1{,}05)^{12}\ .\ 0{,}05}$$

Es darf hier nur der Subtrahendus des Ausdrucks logarithmisch entwickelt, und die zugehörige Zahl von 6000 abgezogen werden, so ist a gefunden.

Durch die mehr gezeigte Behandlung findet sich nun

$$a = 6000 - 3341 = 2659\ \text{Thlr.}$$

§. 284.
(No. 96.)

Aus der Formel XIII. folgt ferner noch:

$$R = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

$$\frac{b(p^n - 1)}{p - 1} = ap^n - R$$

$$b(p^n - 1) = (ap^n - R) \cdot (p - 1)$$

$$b = (ap^n - R) \cdot \frac{p - 1}{p^n - 1} \qquad \text{XV}$$

Aufgabe 29. Es soll zu Bestreitung eines öffentlichen Baues ein Capital von 12000 Thlr. aufgenommen, und in 20 Jahren durch jährliche Abzahlung wieder getilgt werden. Wie viel muß jährlich abgetragen werden, wenn 5 Procent und Zins auf Zins gerechnet werden?

Die Formel war

$$b = (ap^n - R) \cdot \frac{p - 1}{p^n - 1} \quad \text{oder}$$

$$b = ap^n \cdot \frac{p - 1}{p^n - 1} - R \cdot \frac{p - 1}{p^n - 1}$$

Hier ist $a = 12000$, $p = 1{,}05$, $n = 20$, $R = 0$, also

$$b = ap^n \cdot \frac{p - 1}{p^n - 1} \quad \text{Also}$$

$$b = \frac{12000 \cdot (1{,}05)^{20} \cdot 0{,}05}{1{,}05^{20} - 1}$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$20$$

$$20 \log 1{,}05 = 0{,}4237860 = \log 2{,}653297$$
$$- 1$$

$$(1{,}05)^{20} - 1 = 1{,}653297$$

$$\begin{array}{rcl} \log 12000 & = & 4{,}0791812 \\ + \log (1{,}05)^{20} & = & 0{,}4237860 \\ + \log 0{,}05 & = & 0{,}6989700 - 2 \\ + D.E. \log 1{,}653297 & = & 9{,}7816500 - 10 \\ \hline \log b & = & 14{,}9835872 - 12 \\ & = & 2{,}9835872 \\ & = & \log 962{,}54 \text{ Thlr.} \end{array}$$

Aufgabe 30. Es soll eine gegenwärtige Schuld von 1000 fl. in fünfjährliche Termine eingetheilt werden, so daß am Ende jedes Jahres eine gleiche Summe abgezahlt werde. Wie groß muß diese Summe seyn, wenn die Interessen zu 5 Procent vorgeschrieben sind?

Hier ist $a = 1000$, $n = 5$, $p = 1{,}05$, $R = 0$, folglich

$$b = \frac{1000 \,.\, (1{,}05)^5 \,.\, 0{,}05}{(1{,}05)^5 - 1}$$

Man findet hier auf die mehr gezeigte Art

$$\log b = 2{,}3635640 = \log 230{,}97 \text{ fl.}$$

§. 285.

(No. 97.)

Endlich läßt sich aus Formel XIII noch folgende entwickeln.

$$R = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

$$R(p - 1) = (p - 1)\,ap^n - bp^n + b$$

$$R(p - 1) - b = p^n\,[a(p - 1) - b]$$

$$\frac{R(p - 1) - b}{a(p - 1) - b} = p^n$$

$$\log p^n = \log [R(p - 1) - b] - \log [a(p - 1) - b]$$

$$n = \frac{\log [R(p - 1) - b] - \log [a(p - 1) - b]}{\log p} \qquad \text{XVI}$$

Aufgabe 31. Wenn ich 5000 Thlr. anlege, jährlich eine Rente von 300 Thlr. davon beziehe, und die In-

teressen zu 5 Procent gerechnet werden; wie viel Jahre werde ich davon haben? Nach No. XVI ist

$$n = \frac{log[(p-1)R-b] - log[(p-1)a-b]}{log\ p}$$

Hier ist aber $a = 5000$, $b = 300$, $c = 5$, $p = 1{,}05$, $R = 0$, n zu suchen.

$$n = \frac{log\ [0{,}05\ .\ 0 - 300] - log\ (0{,}05\ .\ 5000 - 300)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = \frac{log\ (-300) - log\ (250 - 300)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = \frac{log\ (-300) - log\ (-50)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = log \left[\frac{-300}{-50}\right] : log\ 1{,}05$$

$$n = log\ 6 : log\ 1{,}05$$

$$log\ 6 = 0{,}7781513$$
$$log\ 1{,}05 = 0{,}0211893$$

$$n = \frac{7781513}{211893} = 36{,}04 \text{ Jahren.}$$

Aufgabe 32. Es hat Jemand 100000 Thlr. zu 5 Procent angelegt; er kann aber mit den Interessen von 5000 Thlr. seinen Aufwand nicht bestreiten, sondern er bedarf 6000 jährlich. In wie viel Jahren wird er sein Capital aufgezehrt haben?

Nach voriger Formel ist

$$n = \frac{log\,(0{,}05\ .\ 0 - 6000) - log\,(0{,}05\ .\ 100000 - 6000)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = \frac{log\ (-6000) - log\ (5000 - 6000)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = \frac{log\ (-6000) - log\ (-1000)}{log\ 1{,}05}$$

$$n = \log\left[\frac{-6000}{-1000}\right] : \log 1{,}05$$

$$n = \log 6 : \log 1{,}05$$

$$n = \frac{7781513}{211893} = 36$$ Jahren und etwas darüber.

Aufgabe 33. Da hier etwas mehr als 36 Jahre herauskömmt, so ist zu untersuchen, wie viel von dem Capital nach 36 Jahren noch übrig ist.

So ist $a = 100000$, b 6000, $p = 1{,}05$, $n = 36$, R nach Formel XIII zu suchen.

Man findet nun

$$ap^n = 579181{,}5 \text{ Thlr.}$$

Man sieht hier zugleich, daß ein Capital von 100000 Thlrn. in 36 Jahren mit Zins auf Zins zu 579181,5 Thlrn. anwächst.

Ferner findet man

$$\frac{b(p^n - 1)}{p - 1} = \frac{6000 \cdot 1{,}05^{36} - 6000}{0{,}05}$$

$$= 120000 \cdot 1{,}05^{36} - 120000$$

$$= 695017{,}8 - 120000.$$

Also

$$R = 579181{,}5 - (695017{,}8 - 120000)$$

$$R = 579181{,}5 - 575017{,}8 = 4163{,}7 \text{ Thlr.}$$

sind nach 36 Jahren noch übrig.

Nun ist

$$100 : 5 = 4163{,}7 : x$$

$$20 : 1 = 4163{,}7 : x$$

$$x = \frac{4163{,}7}{20} = 208{,}2$$ Thlrn. Interessen,

welche der Rest noch im letzten Jahre bringt.

Es bezieht also jener Mann am Ende des 37. Jahres noch

$$4163{,}7 + 208{,}2 = 4371{,}9 \text{ Thlr.}$$

§. 286.

(No. 98.)

Die nachstehenden mehr zusammengesetzten Aufgaben mögen diese Reihe von Beispielen schließen.

Aufgabe 34. Es ist ein Rittergut zu verkaufen, es melden sich hierzu 3 Käufer: der erste bietet 34500 Thlr. baare Zahlung; der 2te 38000 Thlr., so daß er 6000 Thlr. sogleich, und 4 Jahre hinter einander zu Ende eines jeden Jahres 8000 Thlr. erlegen will; der 3te bietet 40000 Thlr., will jedoch nur 4000 baar, aber 6 Jahre hinter einander, am Ende jedes Jahres 6000 Thlr. bezahlen. Wer von diesen 3 Käufern hat das Meiste geboten, wenn die Interessen zu 5 Procent landesüblich sind?

Diese Aufgabe zerfällt in zwei ganz getrennte Rechnungen.

1) Ist zu untersuchen, was die 32000 Thlr., so der 2te in 4 Jahren bezahlen will, jetzt werth sind.

2) Zu erwägen, was die 36000 Thlr., so der 3te in 6 Jahren zahlt, jetzt werth sind.

ad 1. Ist nach Formel XV

$b = 8000, \quad c = 5, \quad p = 1{,}05, \quad R = 0$ Also

$$a = \frac{8000 \,.\, (1{,}05)^4 - 8000}{(1{,}05)^4 \,.\, 0{,}05}$$

$$a = \frac{8000 \,.\, (1{,}05)^4}{0{,}05 \,.\, (1{,}05)^4} - \frac{8000}{0{,}05 \,.\, (1{,}05)^4}$$

$$a = \frac{8000}{0{,}05} - \frac{8000}{0{,}05 \,.\, (1{,}05)^4}$$

$$a = 160000 - \frac{160000}{(1{,}05)^4}$$

Nun ist $log\ 160000 = 5{,}2041200$

$- 4\,log\,(1{,}05) = log\ (1{,}05)^4 = 0{,}0847572$

$log\ 160000 - log\ (1{,}05)^4 = 5{,}1193628 = log 131632{,}4$

Also

$$a = 160000 - 131632,4 = 28367,6 \text{ Thlr.}$$

Und nun

6000 + 28367,6 = 34367,6 Thlr., Gebot des 2ten.

ad 2. ist für dieselbe Formel

$b = 6000$, $n = 6$, $p = 1,05$, $R = 0$, und nun

$$a = \frac{6000 \,.\, (1,05)^6 - 6000}{(1,05)^6 \,.\, 0,05}$$

woraus man durch ähnliches Verfahren

$$a = 4000 + 30454,16 = 34454,16 \text{ Thaler}$$

als das Gebot des 3ten findet.

Es hat also der 1ste 34500
der 2te 34367,6
der 3te 34454,16 Thlr. geboten,
mithin der 1ste das Meiste.

Aufgabe 35. Eine Herrschaft hat ihrer Gemeinde eine Summe von 20000 Thlr. vorgestreckt, und dagegen einen Wald in Unterpfand genommen, welcher jährlich 1500 Thlr. reinen Nutzen bringt. Da nur 5 Procent landesüblich sind, und die Herrschaft deßhalb mehr als die erlaubten Interessen zieht, so fragt es sich, wie lange die Herrschaft diesen Wald mit Recht benutzen kann, ohne das Capital zurück zu erhalten?

Hier ist $a = 20000$, $b = 1500$, $p = 1,05$, $R = 0$, und man findet nach Formel No. XVI

$$n = \frac{log\ 3}{log\ 0,05}$$

$$n = \frac{4771213}{211893} = 22 \text{ Jahre und etwas darüber.}$$

Aufgabe 36. Da nun in voriger Aufgabe die Herrschaft den Wald etwas länger als 22 Jahre benutzen könnte, so fragt sich, was die Gemeinde deßhalb noch baar herauszugeben hat? So ist

$a = 20000$, $b = 1500$, $n = 22$, $p = 1{,}05$
und man findet nach Formel XIII

$$R = 747{,}4 \text{ Thlr.}$$

welche die Gemeinde noch herauszuzahlen hat.

Gesetzt aber, die Herrschaft hätte den Wald 30 Jahre benutzt, und es würde gefragt, was solche der Gemeinde herauszahlen müsse? So ist alles wie vorher, nur $n = 30$, und man findet durch dieselbe Formel

$$R = -13219{,}5 \text{ Thlr.}$$

wo das Zeichen — zeigt, daß derjenige Theil, der das Capital vorschoß und den Wald benutzte (d. i. die Rente zog), dem andern Theil herausbezahlen muß.

§. 287.
(No. 99.)

Ich gebe hier noch einige Aufgaben, welche der Leser ohne Anweisung, wenn derselbe die vorhergehenden verstanden hat, allein wird lösen können.

Aufgabe 37. Man hat ein Capital von 1000 Thlrn. zu 5 Procent ausgeliehen, wie viel beträgt es mit Zinseszinsen in 3 Jahren?

1157,625 = 1157 Thlr. 15 gr.

Aufgabe 38. Man ist 100 Thlr. in 2 Jahren und 8 Monaten schuldig, die Interessen zu 5 Procent und Zins auf Zins; was bezahlt man jetzt dafür?

87,8 Thlr. = 87 Thlr. 19 gr. $2\frac{2}{5}$ pf.

Aufgabe 39. Es hat Jemand 22 Jahre hindurch jährlich 10 Thlr. genossen, die er am Ende des 10ten Jahres mit 5 Procent Zinseszinsen herausgeben soll: wie viel wird er bezahlen?

385,052 Thaler.

Aufgabe 40. Man soll 1000 Thlr. in 5 jährlichen

Zahlungsterminen bezahlen, die Interessen zu 5 Procent. Wie viel jedes Jahr?

230,975 Thlr.

Aufgabe 41. Für 1000 Thlr. wird ein Unterpfand gegeben, das jährlich 80 Thlr. einträgt. Wie lange kann es bei dem Zinsfuß zu 5 Procent genützt werden, bis die Schuld getilgt ist?

20,1 Jahr = 20 Jahr $36\frac{1}{2}$ Tag.

Aufgabe 42. Man will von 10400 Thlr. 10 Jahre hindurch eine Rente beziehen, wie viel kann jährlich erhoben werden, die Interessen zu 5 Procent?

1232,8 Thlr.

Aufgabe 43. Von 40000 Klaftern Holzung, als wie hoch ein Wald taxirt ist, werden jährlich 700 Klafter geschlagen; man rechnet, daß jährlich der Nachwuchs $1\frac{1}{2}$ Procent beträgt, wie viel wird nach 125 Jahren noch stehen?

— 6,8 Klafter,

d. h. es würden noch 6,8 Klafter fehlen, um zu Anfange des 125. Jahres noch 700 Klafter zu schlagen.

Aufgabe 44. Jemand legt 1600 Thlr. auf Renten für 20 Jahre, die Interessen zu 5 Procent, wie viel kann er jährlich beziehen?

128,4 Thlr.

Ich beschließe diesen Abschnitt mit einigen Aufgaben aus den geometrischen Reihen, welche nicht zu den vorigen gehören.

Aufgabe 1. Man hat eine arithmetische und eine geometrische Progression, jede von 3 Gliedern; die Summe aller Zahlen beträgt 96. Die erste Zahl der arithmetischen ist in der ersten Zahl der geometrischen 2 Mal enthalten; die zweite Zahl der arithmetischen in der 2ten Zahl der geometrischen 3 Mal; und die dritte der arithmeti-

schen in der 3ten der geometrischen 6 Mal enthalten. Welche Zahlen sind es?

x das 1ste Glied der arithmetischen Reihe

y die Differenz dieser Reihe. So ist die arithmetische Reihe

$$x, \quad x + y, \quad x + 2y,$$

woraus die geometrische

$$2x, \quad 3x + 3y, \quad 6x + 12y$$

woraus die Gleichung

$$\text{A)} \quad 14x + 18y = 96.$$

Nun ist bei 3 geometrischen Reihen-Gliedern, welche unmittelbar auf einander folgen, das Quadrat des mittleren Gliedes, gleich dem Producte der beiden äußeren; also auch

$$\text{B)} \quad (3x + 3y)^2 = 2x(6x + 12y)$$

$$9x^2 + 18xy + 9y^2 = 12x^2 + 24xy$$

$$3x^2 + 6xy = 9y^2$$

$$x^2 + 2xy = 3y^2$$

$$x^2 + 2xy + (y)^2 = 3y^2 + y^2$$

$$x + y = \sqrt{4y^2}$$

$$x = -y + 2y = y$$

Diesen Werth von x in die Gleichung A substituirt, giebt

$$14y + 18y = 96$$

$$32y = 96$$

$$y = 3$$

Also die Reihen

3, 6, 9, die arithmetische

6, 18, 54, die geometrische.

Aufgabe 2. Man hat 5 Zahlen, die in einer geometrischen Progression stehen; die Summe der 4 ersten ist

$97\frac{1}{2}$, die Summe der 4 letzten $146\frac{1}{4}$. Welches sind die Zahlen?

Das erste Glied sey x, der Quotient y.

So ist die Reihe

$$x, \quad xy, \quad xy^2, \quad xy^3, \quad xy^4;$$

also

$$xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 = 146\tfrac{1}{4} = \frac{585}{4} \qquad \text{A.}$$

und

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 97\tfrac{1}{2} = \frac{195}{2} \qquad \text{B.}$$

Man multiplicire die Gleichung B mit y, und ziehe sie von A ab, so ist B mit y multiplicirt.

$$xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 = \frac{390y}{4} \qquad \text{C.}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 = \frac{585}{4} \qquad \text{A.}$$

$$0 = \frac{585}{4} - \frac{390y}{4}$$

$$390y = 585$$

$$y = \frac{585}{390} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Diesen Werth in die Gleichung B substituirt, giebt

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x + \frac{27}{8}x = \frac{390}{4}$$

$$8x + 12x + 18x + 27x = 780$$

$$65x = 780$$

$$x = 12$$

Die Reihe ist nun

$$12, \quad 18, \quad 27, \quad 40\tfrac{1}{2}, \quad 60\tfrac{3}{4}.$$

Aufgabe 3. Jedes Glied der Reihe

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \quad aq^4 \; . \; . \; . \; .$$

soll in m solche Theile getheilt werden, damit alle Theile wieder in einer zusammenhängenden geometrischen Reihe

stehen, und folglich eine Reihe zum Vorschein kömmt, welche m Mal so viel Glieder hat, als die gegebene?

Es sey das erste Glied der gesuchten $= x$
Der Quotient $= y$

So ist

das erste Glied

$$a = x + xy + xy^2 + xy^3, \dots + xy^{m-1} \quad \text{A.}$$

Da nämlich a in m Glieder zertheilt werden soll, das erste Glied x aber keinen Quotienten bei sich führt, so muß das letzte y^{m-1} haben.

Das zweite Glied

$$aq = xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} \dots + xy^{2m-1} \quad \text{B.}$$

Daß das erste Glied dieser Reihe y^m haben muß, folgt aus dem Vorigen, und daß das letzte y^{2m-1} haben muß, ist deßhalb klar, weil diese beiden Reihen zusammen $2m$ Glieder haben müssen, folglich muß das letzte Glied derselben den Exponenten $2m-1$ haben.

Das dritte Glied

$$aq^2 = xy^{2m} + xy^{2m+1} + \dots xy^{3m-1} \quad \text{C.}$$

aus gleichen Gründen wie vorher.

Die neue Reihe ist also

$$\begin{aligned} &x + xy + xy^2 \dots + xy^{m-1}, \\ &+ xy^m + xy^{m+1} \dots + xy^{2m-1}, \\ &\underbrace{+ xy^{2m} + xy^{2m+1} \dots + xy^{3m-1}.} \end{aligned}$$

Die Gleichung A mit y^m multiplicirt, giebt

$$ay^m = xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \dots xy^{2m-1} \quad \text{D.}$$

Man hat hier in D die Reihe B erhalten, also ist auch

$$\frac{aq = ay^m}{q = y^m} \quad \text{E.}$$

F. $\sqrt[m]{q} = y =$ dem Quotienten der neuen Reihe.

Nun summirt man in der Gleichung A die Glieder nach der Formel No. 5.

$$ſ = \frac{tq - a}{q - 1}$$

so ist $ſ = \frac{xy^{m-1} \cdot y - x}{y - 1}$

$$ſ = \frac{xy^m - x}{y - 1} = \frac{x(y^m - 1)}{y - 1} =$$

= der Summenformel der Reihe des ersten Gliedes. Um nun dadurch die Hauptreihe zu erhalten, substituire man aus E und F die Werthe von y^m und y in diese Formel, so ist

$$\frac{x(y^m - 1)}{y - 1} = \frac{x(q - 1)}{\sqrt[m]{q} - 1}$$

welches nun ebenfalls die Summe des ersten Glieds ist; mithin

$$\frac{x(q - 1)}{\sqrt[m]{q} - 1} = a$$

$$x = \frac{a\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)}{q - 1} =$$

dem ersten Gliede der neuen Reihe. Da nun durch $y = \sqrt[m]{q}$ auch der Quotient derselben gegeben ist, so kann die Reihe angesetzt werden.

Nämlich diese Reihe ist

$$\underbrace{\frac{a\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)}{q - 1}}_{x}, \quad \underbrace{\frac{a\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)\sqrt[m]{q}}{q - 1}}_{xy},$$

$$\underbrace{\frac{a\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)\sqrt[m]{q^2}}{q - 1}}_{xy^2} \quad \ldots\ldots$$

Sollte nun z. B. die Reihe 7, 56, 448 so behandelt werden; so soll jedes Glied in 3 Glieder zerlegt werden; es ist nun

$$a = 7,\quad q = 8,\quad m = 3,$$

also das erste Glied der neuen Reihe

$$x = \frac{7(\sqrt[3]{8} - 1)}{7} = \sqrt[3]{8} - 1 = 2 - 1 = 1$$

und der Quotient y ist

$$y = \sqrt[m]{q} = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ woraus die Reihe}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1, & 2 . 1, & 2 . 2, \\ 1, & 2, & 4, \end{matrix}}_{\text{1stes Glied} = 7;} \quad\Bigg|\quad \underbrace{\begin{matrix} 2 . 4, & 2 . 8, & 2 . 16, \\ 8, & 16, & 32, \end{matrix}}_{\text{2tes Glied} = 56;}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2 . 32, & 2 . 64, & 2 . 128; \\ 64, & 128, & 256 \end{matrix}}_{\text{3tes Glied} = 448.}$$

Soll nun auch die Summe von n Gliedern dieser Reihe gefunden werden, so ist nach Formel No. 6

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Hier ist das erste Glied $a = \dfrac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1}$

die Anzahl der Glieder $n = n$

der Quotient $q = \sqrt[m]{q}$

des Quotienten $n$te Potenz $q^n = \sqrt[m]{qn}$

Diese Glieder in die Formel 6, giebt

$$s = \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\ (\sqrt[m]{q^n} - 1)}{(q - 1)\ \ (\sqrt[m]{q} - 1)} = \frac{a(\sqrt[m]{q^n} - 1)}{q - 1}$$

die Summen-Formel der gesuchten Reihe. Z. B. es soll die Summe von 7 Gliedern gefunden werden, so ist $a = 7,\ q = 8,\ m = 3,\ n = 7$ und

$$s = \frac{7(\sqrt[3]{8^7} - 1)}{8 - 1} = (\sqrt[3]{8^7} - 1) =$$

$$= \sqrt[3]{8^6} . 8 - 1 = 8^2 \sqrt[3]{8} - 1 = 2 . 8^2 - 1 =$$

$= 128 - 1 = 127$, nämlich
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$.

Eben so wäre die Summa aller 9 Glieder

$$f = \frac{7(\sqrt[3]{8^9} - 1)}{7} = \sqrt[3]{8^9} - 1 = 8^3 - 1 =$$
$$= 512 - 1 = 511.$$

Man würde jedoch die Summirung dieser Reihen auch vornehmen können, ohne erst das allgemeine Glied gefunden zu haben; indem man in der Formel 6 statt n, $\frac{n}{m}$ setzt; nämlich

$$f = \frac{a\left(q^{\frac{n}{m}} - 1\right)}{q - 1}$$

So ist hier $a = 7$, $q = 8$, $\frac{n}{m}$ für 7 Glieder $= \frac{7}{3}$, $m = 3$

$$f = \frac{7(8^{\frac{7}{3}} - 1)}{8 - 1} = \frac{7 . (\sqrt[3]{8^7} - 1)}{7} =$$
$$= \sqrt[3]{8^7} - 1 = \sqrt[3]{8^6} . 8 - 1 = 8^2 . \sqrt[3]{8} - 1 =$$
$$= 2 . 8^2 - 1 = 127, \text{ wie oben.}$$

Aufgabe 4. Anwendung des Vorigen. Es bestellt Jemand bei einem Juwelier einen Diamant, mit dem Accord, daß er für den ersten Karath 40 Thlr., für den zweiten 120 Thlr., für den dritten 360 Thlr. u. s. w., nämlich für jeden folgenden immer 3 Mal so viel, als für den vorigen zahlen wolle. Das Gewicht des Diamants ist aber $3\frac{1}{4}$ Karath, was wird bezahlt?

Hier ist $a = 40$, $q = 3$, $m = 4$, $n = 13$, weil $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4} = \frac{n}{m}$; folglich der Werth des Diamants

$$f = \frac{40(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)}{3 - 1} = 20\left(\sqrt[4]{3^{13}} - 1\right)$$

Nun ist $\log \sqrt[4]{3^{13}} = \frac{13 . \log 3}{4} = 1,5506442$
$= \log 35,534$, also
$f = 20 . (35,534 - 1) = 20 . 34,534 = 690,68.$

So ist nun der Werth des 1sten Karaths	40
Werth des 2ten Karaths	120
Werth des 3ten Karaths	360
Summa der 3 ersten	520
subtrahirt von	690,68
Werth des letzten Viertels	170,68 Thlr.

Wollte man hier den 4ten Karath in 4 Theile theilen, und $\frac{1}{4}$ davon für das letzte Viertel nehmen, so würde der Käufer zu viel bezahlen; denn wenn die Ganzen in geometrischer Progression steigen, so steigen es auch die Theile.

Der 4te Karath wäre 360 . 3 = 1080 Thlr. $\frac{1080}{4}$ = 270 Thlr., würde nach dieser Rechnung das letzte Viertel kosten; es hat aber nach der richtigen Rechnung nur 170,68 gekostet, folglich hätte der Käufer in diesem Falle 270 — 170,68 = 99,32 Thlr. zu viel bezahlt.

Aufgabe 5. Man hat ein Faß Wein, welches a Maaß enthält, und jedes Maaß c Groschen werth ist; es wird b Maaß herausgezapft, und das Faß wieder mit Wasser gefüllt. Nachdem sich nun das Wasser mit dem Weine völlig gemischt hat, wird wieder b Maaß herausgezapft und das Faß wieder mit Wasser angefüllt. Wie oft kann dieses Abzapfen und Wiederanfüllen wiederholt werden, so daß doch das Maaß im Fasse noch d Groschen an Werth behält?

Wenn das Wasser sich völlig mit dem Weine vermischt, so läuft auch bei jedem Abzapfen wieder ein Theil Wasser mit heraus; also verhält sich bei jedem Abzapfen die ganze Vermischung im Fasse zu der abgezapften Vermischung, wie die Menge Wein, so im Fasse ist, zu der Menge Wein, so mit herausläuft. Es sind aber nach dem ersten Abzapfen noch $a - b$ Maaß Wein im Fasse.

So ist nun

$$a : b = (a - b) : \frac{(a - b)b}{a}$$

Es fließt also $\left[\frac{(a - b)}{a}\right]b = \frac{ab - b^2}{a}$ Maaß Wein, der bei'm 2ten Abzapfen mit aus dem Fasse läuft.

So bleibt also nach diesem Abzapfen noch

$$(a - b) - \left[\frac{ab - b^2}{a}\right] = \frac{a^2 - ab - ab + b^2}{a}$$

$$= \frac{(a - b)^2}{a} \text{ im Fasse.} \qquad \text{A.}$$

Also wieder

$$a : b = \frac{(a-b)^2}{a} : \frac{(a-b)^2 \cdot b}{a^2}$$

Es fließt also bei'm 3ten Abzapfen

$$\frac{(a^2 - 2ab + b^2)b}{a^2} = \frac{a^2b - 2ab^2 + b^3}{a^2}$$

Maaß Wein mit aus dem Fasse; und bleibt deßhalb nach diesem Abzapfen noch

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} - \frac{a^2b - 2ab^2 + b^3}{a^2} =$$

$$= \frac{a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3}{a^2} =$$

$$= \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$$

im Fasse. B.

Nun ist wieder

$$a : b = \frac{(a-b)^3}{a^2} : \frac{(a-b)^3 \cdot b}{a^3}$$

nämlich

$\frac{(a-b)^3 b}{a^3}$ Maaß Wein laufen bei dem 4ten Abzapfen mit heraus.

Durch ein ähnliches Verfahren findet man nun, daß nach diesem Abzapfen

C. $\frac{(a-b)^4}{a^3}$ Maaß Wein im Fasse bleiben.

Vergleicht man die Ausdrücke A, B und C, so ergiebt sich, daß nach dem $n$ten Abzapfen

$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Maaß Wein im Fasse bleiben.

Da nun jedes Maaß Wein c Groschen werth ist, so ist der Rest Wein im Fasse

$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \cdot c$ Groschen werth.

Es soll aber jedes im Fasse befindliche Maaß d Groschen Werth noch haben, also muß

$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \cdot c = ad$ seyn.

So ist nun

$$n \log (a-b) + \log c - (n-1) \log a = \log a + \log d$$

$$n \log (a-b) + \log c - n \log a + \log a = \log a + \log d$$

$$\frac{\log c - \log d = n \log a - n \log (a - b)}{\log c - \log d = n [\log a - \log (a - b)]}$$

$$\underbrace{\frac{\log c - \log d}{\log a - \log (a - b)}} = n$$

Aufgabe 6. Anwendung vorigen Ausdrucks.

Man hat ein Faß Wein von 60 Maaß, zapft 1 Maaß auf einmal heraus, und gießt immer Wasser dafür hinzu. Das Maaß des Weins kostete 10 gr.; wie lange kann das Abzapfen fortgesetzt werden, daß das Maaß noch 4 gr. werth ist?

$a = 60$, $b = 1$, $c = 10$, $d = 4$, so ist

$$n = \frac{\log 10 - \log 4}{\log 60 - \log 59}$$

$$\begin{array}{r} \log 10 = 1{,}0000000 \\ \log 4 = 0{,}6020600 \\ \hline 0{,}3979400 \\ \log 60 = 1{,}7781513 \\ - \log 59 = 1{,}7708520 \\ \hline 0{,}0072993 \end{array}$$

$n = \frac{3979400}{72993} = 54$ Mal, da hiernach ein Bruch übrig bleibt, so ist dieß ein Zeichen, daß nach dem 54maligen Abzapfen, die Vermischung noch etwas besser als 4 gr. an Werth ist.

Druckfehler.

Seite 100. letzte Zeile setze man: $\frac{t - a}{n - 1}$ statt $\frac{t \quad a}{n \quad 1}$.

— 102. Zeile 4. von unten setze man: n statt a.

— — letzte Zeile setze man: $\frac{t^2}{d^2}$ statt $\frac{t2}{d2}$.

— 133. Zeile 3. setze man: $\overset{1}{\int}$ statt $\int$.

— 135. Zeile 19. setze man: $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ statt $\frac{[n(n+1)]^2}{2}$.

— — Zeile 6. von unten setze man: jedes höheren Ranges das, und lasse das Wort höhere weg.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Streit, Friedrich Wilhelm, 1772-1839

Lehrbuch der reinen Mathematik

Bd.: 3

Weimar 1832

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.54-a(3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739763-9